

15. Medida: conceptos y errores

a. -Sobre las medidas.

Ciertas mag. físicas (masa, temperatura, fuerza) quedan definidas cuando se establecen el proceso de medición, a través de la igualdad y la suma. Este tipo de definición se llama OPERACIONAL. (Existen otras mag. que se definen por una relación convencional a partir de un cierto contenido físico)

La obtención de una medida por un determinado proceso de medición, cualquiera sea, puede ser más o menos precisa debido a:

- a) limitaciones de nuestros aparatos de medida; todos dan el resultado de una medición, con seguridad, hasta cierto orden decimal;
- b) limitación teórica como por ejemplo, en el dominio atómico (Principio de Incertidumbre);
- c) alteraciones producidas entre la interacción entre el dispositivo de medición y lo que queremos medir;
- d) la propia indeterminación de la cantidad a medir y la imperfección de los sentidos (errores personales).

En síntesis, el proceso de medición nos lleva a la obtención del valor más representativo de la magnitud medida con un determinado margen de error.

b. -Medida DIRECTA.

Una medida nunca está exactamente determinada; siempre presenta un intervalo de tolerancia en el valor de la misma, llamado INCERTIDUMBRE de la medida (más frecuentemente, error absoluto máximo).

Desde el punto de vista de la Física "error" NO es equivalente a "equivocación", el error de una medida no solo es imposible que no exista sino que es imprescindible para que la medida sea correcta (*).

* -Ver: "Problemas" (23)

(Una medida correctamente expresada debe proporcionar el VALOR MAS PROBABLE de la magnitud y la INCERTIDUMBRE correspondiente.

El valor más probable de una magnitud es el valor que podemos conocer con mayor precisión.

Una forma de determinar el valor más probable, es formar una serie de medidas de la misma magnitud (p.ej. medir una longitud con la misma regla varias veces y de ser posible por varias personas). Obtendremos así valores que diferirán un poco entre sí, pero si aceptamos que aquellos que difieren por encima y por debajo del valor más probable son igualmente probables, podemos tomar como el valor más probable como el valor medio de la serie (promedio aritmético).

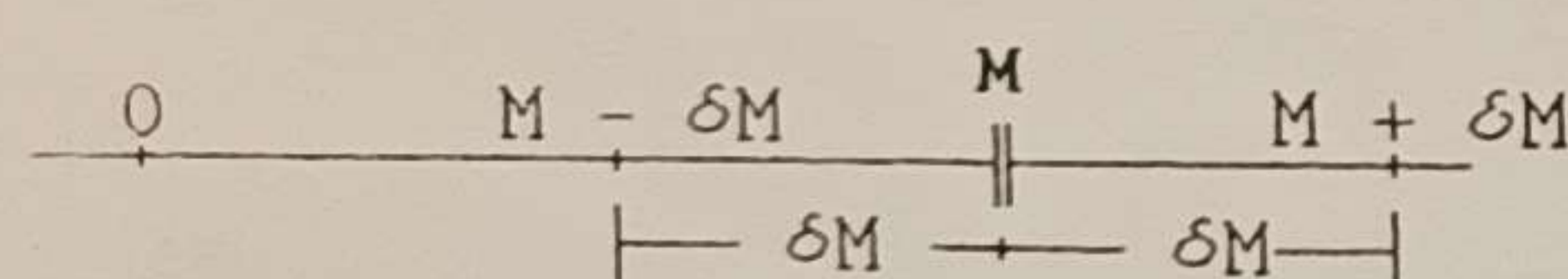
Si M es el valor más probable de las "N" medidas entonces:

$$M = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_N}{N}$$

Si existe un valor predominante de la serie (modo) se toma este valor como el más probable.

Para la incertidumbre de la medida M (δM) debemos tomar una cantidad tal que sumada y restada a M, cubra un intervalo tal que nos asegure que cualquier medida caerá dentro del intervalo o, por lo menos, que sea altamente probable que caiga dentro de él.

Si tomamos un eje con la medida M y su incertidumbre δM nos quedaría:



Y se expresa:

$$M = M \pm \delta M$$

Cuanto más precisa sea una medida menor es δM .

Si en las "N" medidas tomadas, se elige la mayor y la menor, toda otra está dentro del intervalo acotadas por estas y el valor medio equidistante de ellas; si llamamos RANGO a tal intervalo, el δM puede evaluarse por el SEMIRANGO que es la "distancia" de la media a cada extremo:

$$\text{Rango} = \text{Valor máximo} - \text{Valor mínimo} \Rightarrow \text{Semirango} = \frac{(V.\text{máx.} - V.\text{mín.})}{2}$$

En nuestro caso:

$$\delta M = \frac{M_{\text{máx.}} - M_{\text{mín.}}}{2}$$

c. - Error relativo y error porcentual.

La precisión de una medida se evalúa efectuando el cociente entre la incertidumbre o error, δM , y el valor más probable M. A este cociente se llama ERROR RELATIVO o incertidumbre relativa.

$$\text{ERROR RELATIVO} = \frac{\delta M}{M}$$

Cuanto menor sea el error relativo más precisa es la medida ya que es menor δM en comparación con M (No es lo mismo un δM de un metro para una medida de 15m que para una medida de 7500m).

ERROR PORCENTUAL es la multiplicación del error relativo por cien. Nos indica si la medida es "admisible". Por ejemplo un 1% (1 en 100) de error porcentual es un error pequeño, en cambio si el error porcentual es del 50% (50 en 100) el error es muy grande comparado con la medida, esto nos llevaría a realizar nuevamente la medida y, hasta descartarla en ciertas circunstancias.

$$\text{ERROR PORCENTUAL} = \text{ERROR RELATIVO} \cdot 100\%$$

d. - Medidas Indirectas.

Son aquellas que se obtienen OPERANDO con medidas directas. Por ejemplo la medida del área a partir de la medida de la base y la medida de la altura.

El valor más probable se obtiene de la operación de los valores más probables de las medidas directas que intervienen en el proceso y su error mediante el uso de los teoremas de distribución de errores (ver más abajo).

e.- Clasificación de errores.

Existen dos grandes grupos : SISTEMATICOS (o determinados) y ACCIDENTALES (o azarosos).

1) Errores Sistemáticos son aquellos que, en principio, pueden ser conocidos, y por lo tanto corregidos (aunque a veces se torne difícil)

a) Errores instrumentales -ej. reglas mal graduadas, masa mal marcadas, balanza de brazos desiguales, etc.- en gral. pueden corregirse.

b) Errores de método - cuando se plantean varios métodos posibles para realizar la medida- en gral. puede deducirse el más adecuado.

2) Errores Accidentales son en gral. de pequeña cuantía y fluctuantes en valor y signo. Su valor es menor que la apreciación del instrumento, siempre que se trabaje en buenas condiciones y que el operador sea cuidadoso, evitando errores de paralaje, no estimando con demasiado "optimismo", manejando correctamente los instrumentos, etc. /

f.- CIFRAS SIGNIFICATIVAS.

Su número expresa la precisión con que se realiza una medida, incluyen todos los dígitos seguros y el primero inseguro:

$M = 0,635 \pm 0,002$ indica que el 5 es el primer inseguro con un error estimado de 2. (*)

1) Los ceros que únicamente señalan el lugar decimal de la primera cifra distinta cero no se consideran C.Sig. (El ej. anterior tiene 3 cifras significativas).

2) Si una medida tiene más de una C. Insegura se debe expresar con una, la primera a la izquierda, al lado de las C. Seguras. Si la segunda c. insegura es 4 o menor que 4 no modifica la 1era. insegura, si es 5 o más le agrega un dígito (Regla del redondeo).

Ejemplo: a) 5,67823m con las cifras 8, 2 y 3 inseguras, se expresa correctamente como 5,678m; b) 68,57Kg con 5 y 7 inseguras, queda 68,6Kg.

(*) - En el ejemplo faltan las unidades y no está en notación científica. Ver)

3) El error de una medida debe estar expresa con una cifra insegura, sin cifras seguras. Si por algún método el error queda con más de una cifra todas ellas son inseguras, quedandonos con la primera distinta de cero (ver 2).

4) La última cifra de la medida DEBE coincidir con la cifra insegura del error ($M = (43 \pm 6) \frac{m}{s}$, $M' = (0,435 \pm 0,002) \frac{m}{s}$).

5) Para la notación científica la medida (y el error) se expresan en potencia de diez siendo el número que acompaña la potencia menor a 10 y mayor o igual a 1 (Ver: "Potencia de Diez" [10]).

Ejemplos: $711m = 7,11 \cdot 10^2m$; $0,603N = 6,03 \cdot 10^{-1}N$.

Las cifras significativas NO tienen nada que ver con el lugar con la com (",").

g.- Propagación de errores

El análisis lo dividiremos en tres partes: 1) planteo de los casos más comunes en el Práctico,

2) casos particulares,

3) demostraciones.

1) Ejemplos de propag. de errores que se utilizaran en el práctico.

CASO	E. RELATIVO	E. ABSOLUTO
1 $S = a + b$	-----	$\delta S = \delta a + \delta b$
2 $R = a - b$	-----	$\delta R = \delta a + \delta b$
3 $M = a \cdot b$	$\frac{\delta M}{M} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b}$	$\delta M = b \cdot \delta a + a \cdot \delta b$
4 $D = \frac{a}{b}$	$\frac{\delta D}{D} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b}$	$\delta D = \frac{b \cdot \delta a + a \cdot \delta b}{b^2}$
5 $P = a^n$	$\frac{\delta P}{P} = \frac{n \cdot \delta a}{a}$	$\delta M = n \cdot a^{n-1} \delta a$
6 $\text{sen } \alpha$	$\frac{\delta(\text{sen } \alpha)}{\text{sen } \alpha} = \frac{\delta(\alpha)}{\text{tg } \alpha}$	$\delta(\text{sen } \alpha) = \delta(\alpha) \cdot \text{cos } \alpha$
7 $\text{cos } \alpha$	$\frac{\delta(\text{cos } \alpha)}{\text{cos } \alpha} = \text{tg } \alpha \cdot \delta(\alpha)$	$\delta(\text{cos } \alpha) = \delta(\alpha) \cdot \text{sen } \alpha$

Ejemplos:

1 $E_M = E_{pg} + E_c$	-----	$\delta E_M = \delta E_{pg} + \delta E_c$
2 $x = l_f - l_i$	-----	$\delta x = \delta l_f + \delta l_i$
3 $P = m \cdot g$	$\frac{\delta P}{P} = \frac{\delta m}{m} + \frac{\delta g}{g}$	$\delta P = g \cdot \delta m + m \cdot \delta g$
4 $K = \frac{F}{x}$	$\frac{\delta K}{K} = \frac{\delta F}{F} + \frac{\delta x}{x}$	$\delta K = x \cdot \delta F + F \cdot \delta x$
5 $z = v^2$	$\frac{\delta z}{z} = \frac{2 \cdot \delta v}{v}$	$\delta z = 2 \cdot v \cdot \delta v$

2. Casos particulares:

I) Si a es constante no tiene error ($\delta a = 0$).

II) Si $\delta b \ll \delta a \Rightarrow \delta b \rightarrow 0 \Rightarrow \delta a \cong \delta \text{magnitud}$.

III) Si $\delta b \ll b \Rightarrow \frac{\delta b}{b} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\delta M}{M} \cong \frac{\delta a}{a}$ (Caso 3) y 4)).

IV) Si $\frac{\delta b}{b} \ll \frac{\delta a}{a} \Rightarrow \frac{\delta M}{M} \cong \frac{\delta a}{a}$ (Caso 3) y 4)).

($\ll$: muchísimo menor; $\rightarrow$: tiende a cero, es despreciable; $\cong$: aprox.=)

Para pensar:

1. ¿Cómo explicaría con un ejemplo concreto porque, en una resta de magnitudes, el error es la suma de los errores de las medidas?

2. Obtenga el error de Ec. si: $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

3.-Deducción (1)

I) SUMA: $S = a + b$ y $S = a + b$

$$S \pm \delta S = (a \pm \delta a) + (b \pm \delta b) = (a + b) \pm (\delta a + \delta b) \Rightarrow \delta S = \delta a + \delta b$$

II) RESTA: $R = a - b$ y $R = a - b$

$$R \pm \delta R = (a \pm \delta a) - (b \pm \delta b) = a - b \pm (\delta a + \delta b) \Rightarrow \delta R = \delta a + \delta b$$

Otra forma: Valor máximo $\Rightarrow R + \delta R = (a + \delta a) - (b - \delta b)$

$$R + \delta R = a - b + \delta a + \delta b = a - b + (\delta a + \delta b) \Rightarrow \delta R = \delta a + \delta b$$

III) Multiplicación: $M = a \cdot b$ y $M = a \cdot b$

$$M \pm \delta M = (a \pm \delta a) \cdot (b \pm \delta b) = \pm a \cdot \delta b \pm b \cdot \delta a + a \cdot b \pm \delta a \cdot \delta b$$

$\delta a \cdot \delta b \rightarrow 0$ (Comparado con los otros valores) $\Rightarrow$

$$M \pm \delta M = a \cdot b \pm a \cdot \delta b \pm b \cdot \delta a = (a \cdot b) \pm (a \cdot \delta b + b \cdot \delta a) \Rightarrow$$

$$\delta M = a \cdot \delta b + b \cdot \delta a \quad \text{Error Absoluto}$$

$$\frac{\delta M}{M} = \frac{a \cdot \delta b + b \cdot \delta a}{a \cdot b} = \frac{a}{a \cdot b} \cdot \delta b + \frac{b}{a \cdot b} \cdot \delta a = \frac{\delta b}{b} + \frac{\delta a}{a} \quad \text{Error Relativo}$$

IV) División: $D = \frac{a}{b}$ y $D = \frac{a}{b}$

$$D \pm \delta D = \frac{a \pm \delta a}{b \pm \delta b} = \frac{(a \pm \delta a) \cdot (b \pm \delta b)}{(b \pm \delta b) \cdot (b \pm \delta b)} = \frac{\pm a \cdot \delta b \pm b \cdot \delta a + a \cdot b \pm \delta a \cdot \delta b}{\pm b \cdot \delta b \pm b \cdot \delta b + b \cdot b \pm \delta b \cdot \delta b}$$

$$D \pm \delta D = \frac{a \cdot b \pm (a \cdot \delta b + b \cdot \delta a) \pm \delta a \cdot \delta b}{b^2 \pm 2 \cdot b \cdot \delta b \pm \delta b \cdot \delta b}$$

pero: $\delta a \cdot \delta b \rightarrow 0$; $\delta b \cdot \delta b \rightarrow 0$; $2 \cdot b \cdot \delta b \ll b^2$ (Es despreciable).

$$\text{Por lo tanto: } D \pm \delta D = \frac{a \cdot b \pm a \cdot \delta b + b \cdot \delta a}{b^2} = \frac{a}{b} \pm \frac{a \cdot \delta b + b \cdot \delta a}{b^2}$$

$$\delta D = \frac{a \cdot \delta b + b \cdot \delta a}{b^2} \quad \text{Error Absoluto}$$

$$\frac{\delta D}{D} = \frac{a \cdot \delta b + b \cdot \delta a}{b^2} \times \frac{a}{b} = \frac{a \cdot \delta b + b \cdot \delta a}{b^2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot \delta b + b \cdot \delta a}{a \cdot b} = \frac{a \cdot \delta b}{a \cdot b} + \frac{b \cdot \delta a}{a \cdot b}$$

$$\frac{\delta D}{D} = \frac{\delta b}{b} + \frac{\delta a}{a} \quad \text{Error Relativo}$$

V) Seno α :
(2)

$$\delta(\text{sen} \alpha) = \text{sen}(\alpha + \delta(\alpha)) - \text{sen} \alpha = \text{sen} \alpha \cdot \cos(\delta(\alpha)) - \cos \alpha \cdot \text{sen}(\delta(\alpha)) - \text{sen} \alpha$$

Si $\delta(\alpha) \rightarrow 0 \Rightarrow \cos(\delta(\alpha)) \rightarrow 1$ y $\text{sen}(\delta(\alpha)) \rightarrow \delta(\alpha) \Rightarrow$

$$\delta(\text{sen} \alpha) = \text{sen} \alpha \cdot 1 - \cos \alpha \cdot \delta(\alpha) - \text{sen} \alpha = -\cos \alpha \cdot \delta(\alpha) \quad \text{Error Absoluto.}$$

$$\frac{\delta(\text{sen} \alpha)}{\text{sen} \alpha} = \frac{-\cos \alpha \cdot \delta(\alpha)}{\text{sen} \alpha} = \frac{-\cos \alpha}{\text{sen} \alpha} \cdot \delta(\alpha) = \frac{-\delta(\alpha)}{\text{tga}} \quad \text{Error Relativo}$$

VI) Coseno α :
(2)

$$\delta(\cos \alpha) = \cos(\alpha + \delta(\alpha)) - \cos \alpha = \cos \alpha \cdot \cos(\delta(\alpha)) - \text{sen} \alpha \cdot \text{sen}(\delta(\alpha)) - \cos \alpha$$

Si $\delta(\alpha) \rightarrow 0 \Rightarrow \cos(\delta(\alpha)) \rightarrow 1$ y $\text{sen}(\delta(\alpha)) \rightarrow \delta(\alpha) \Rightarrow$

$$\delta(\cos \alpha) = \cos \alpha \cdot 1 - \text{sen} \alpha \cdot \delta(\alpha) - \cos \alpha = -\text{sen} \alpha \cdot \delta(\alpha) \quad \text{Error Absoluto}$$

$$\frac{\delta(\cos \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{-\text{sen} \alpha \cdot \delta(\alpha)}{\cos \alpha} = \frac{-\text{sen} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \delta(\alpha) = -\text{tga} \cdot \delta(\alpha) \quad \text{Error Relativo}$$

(*) - Material armado por el Lab. de Física del Liceo N°4
(La deducción no se encuentra en el trabajo original)
(1. - No "gaste" su memoria en aprenderlas. Sería absurdo)
(2. - Ver: "Trigonometría")

15. Medida: unidades

a. Unidades de Medición.

Se llama UNIDADES DE MEDICION [A] de la magnitud física A, una magnitud física elegida convencionalmente que tiene el mismo sentido físico que dicha magnitud A.

Recibe el nombre de SISTEMA DE UNIDADES DE MEDICION el conjunto de unidades de medición, establecidas de forma concreta, de todas las mag. que se consideran en una rama determinada (P.ej.:mecánica).

b. Sistema de Unidades.

Se aceptan tres sistemas de unidades:

- I) el sistema técnico MKgfS, en el cual se toman como unidades principales el metro (M), el Kilogramo fuerza (Kgf) y el segundo (S);
- II) el sistema físico absoluto CGS, en el que las unidades fundamentales son el centímetro (C), el gramo (G) y el segundo (S); y
- III) el sistema internacional (SI) o sistema práctico absoluto MKS, cuyas unidades fundamentales son el metro (M), el Kilogramo (K) y el segundo (S).

Como medida de ángulo se toma el RADIÁN y como medida de temperatura el KELVIN.

c. Definición de unidades fundamentales.

La unidad de longitud, el metro (m), es igual a $1:650.763,73$ longitudes de onda, en el vacío, de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles $2p_{10}$ y $5d_5$ del átomo de criptón 86.

El Kilogramo (Kg) (unidad de masa) es la masa del prototipo internacional del Kilogramo.

El segundo (s) es la fracción $1/3:155.925,9747$ del año trópico, para enero 0 de 1900 a las 12 horas, tiempo efemérico. Se llama año trópico el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos del Sol por el punto o Equinoccio de primavera. Se da el nombre de tiempo efemérico al tiempo uniforme que se utiliza en la astronomía desde que se estableció que la rotación de la Tierra y el transcurso del tiempo que en ella se basa no son uniformes.

El Kilogramo-fuerza (Kgf) o Kilopondio es la fuerza que le comunica a una masa igual al Kilogramo patrón una aceleración igual a $9,80665 \frac{m}{s^2}$.

El radián (rad) es el ángulo con vértice en el centro de un círculo que intercepta, sobre la circunferencia de ese círculo, un arco igual al radio. (Ver: radián en Trigonometría)

Para la escala Kelvin se toma como el punto principal de referencia la temperatura del punto triple del agua, igual a 273,16K.

d.-Otras definiciones.

1. Se llaman sistemas de unidades ABSOLUTOS los sistemas en los cuales se toman en calidad de unidades fundamentales de las mag. mecánicas las unidades de longitud, masa y tiempo.

Reciben el nombre de UNIDADES FUNDAMENTALES o PRIMARIAS DE MEDICION de un sistema dado las unidades de medición establecidas independientemente para varias (generalmente tres o cuatro) mag. físicas heterogéneas elegidas arbitrariamente (p.ej. en el sistema MKS: el metro, etc.).

Se denomina UNIDADES DE MEDICION DERIVADAS o SECUNDARIAS aquellas que se establecen por medio de las primarias del sistema dado basándose en las leyes físicas que expresan la relación existente entre las mag. físicas de que se trate y las mag. cuyas unidades de medición se toman como fundamentales (Por ej. en MKS, el Newton es una unidad derivada a partir del Kg y el $\frac{m}{s^2}$).

Se da el nombre de FORMULA DIMENSIONAL o simplemente DIMENSION de una mag. física B cualquiera a la expresión que define la relación existente entre la unidad de medición de esta magnitud [B] y las unidades fundamentales $[A_1], [A_2], \dots, [A_m]$ del sistema dado. Las fórmulas dimensionales tienen la forma de monomios potenciales:

$$[B] = [A_1]^{m_1} [A_2]^{m_2} \dots [A_m]^{m_N}$$

donde N es el número de unidades fundamentales y $m_1, m_2, \dots, m_N$ son números racionales. Para la velocidad media, por su definición, las dimensiones son LT^{-1} siendo L $\rightarrow$ longitud, y T $\rightarrow$ tiempo (en el sistema MKS, la unidad es $\frac{m}{s}$ o $m \cdot s^{-1}$ y en el CGS es $\frac{cm}{s}$ o $cm \cdot s^{-1}$).

2. Se dicen MAGNITUDES FISICAS HOMOGENEAS las que tienen la misma dimensión y sentido físico, es decir, aquellas que solamente se diferencian por su valor numérico (por ejemplo, las coordenadas de los puntos de un cuerpo y sus dimensiones lineales).

Se llaman HOMONIMAS las mag. físicas que teniendo igual dimensión se diferencian en su sentido físico (por ej. el trabajo y el momento de una fuerza tienen las mismas dimensiones $[ML^2S^{-2}]$).

Las dimensiones cuyos valores numéricos no dependen del sistema de unidad de medición que se elija, reciben el nombre de MAGNITUDES ADIMENSIONALES. Por ejemplo, la relación entre dos mag. homogéneas o dos mag. homónimas es una cantidad adimensional como es el caso del radián.

PROBLEMAS:

1.-Suponga que tiene dos medidas con diferentes unidades, p.ej. $20 \frac{m}{s^2}$ y 80N. Entre sí, ellas se pueden:

I)¿Sumar?; II)¿Restar?; III)¿Multiplicar?; IV)¿Dividir?.

2.-¿Existen magnitudes diferentes con unidades iguales?
¿Y con iguales dimensiones?

3.-Deduzca, operando con las unidades, de qué magnitud se podría tratar.

Por ej.: Ecuación: $\Delta r = v_m \cdot \Delta t$

Unidades: $v_m \rightarrow \frac{m}{s}$; $\Delta t \rightarrow s$.

Sustituyendo: $\Delta r \rightarrow \frac{m}{s} \cdot s = m$ que podría corresponder al desplazamiento.

(Para saber las magnitudes y sus unidades, ver: "Magnitud" (17))

a) $Z = \sqrt{v_i^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta r}$

b) $X = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

c) $Y = F \cdot R \cdot \cos \alpha$

(X, Z e Y no son símbolos de magnitudes, Ud. debe deducir de qué mag. se trata)

c.- Factores de conversión entre diferentes unidades.

MAGNITUD	EQUIVALENCIA
Velocidad	$3,6 \frac{m}{s} = 1,0 \frac{km}{h}$
Angulo	$1,0 rad = 180/\pi$ grado
Velocidad angular (ω)	$1,0 rpm = \pi/30 \frac{rad}{s}$
Energía	$1,0 cal = 4,2 J$
Temperatura	$T_c = T_k - 273,16$
Volumen	$1,0 m^3 = 1,0 \cdot 10^3 l$
Presión	$1,0 at = 1,0 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$
Ang. de giro	$1 \text{ revolución} = 2\pi \text{ rad}$

f.- Sistema Decimal de Unidades.

La mayoría de las unidades se basan en el Sistema Decimal, es decir van de diez en diez, como nuestro sistema de numeración.

A cada múltiplo y submúltiplo se le asigna un nombre (prefijo) que corresponde a una Potencia de Diez. (Ver: Pot. de Diez en 10 b) :

Símbolo	Nombre	Pot.de diez	Símbolo	Nombre	Pot.de diez
a	Atto...	(10^{-18})	c	Centi...	(10^{-2})
f	Femto...	(10^{-15})	d	Deci...	(10^{-1})
p	Pico...	(10^{-12})	da	Deca...	(10^1)
n	Nano...	(10^{-9})	h	Hecto...	(10^2)
μ	Micro...	(10^{-6})	K	Kilo...	(10^3)
m	Mili...	(10^{-3})	M	Mega...	(10^6)

Por ejemplo: $43 km = 43 \text{ Kilometros} = 43 \times 10^3 \text{ metros}$.
 $0,7 cl = 0,7 \text{ centilitros} = 0,7 \times 10^{-2} \text{ litros}$.

Para longitudes existe otro submúltiplo: El anstrom (A) que equivale a $10^{-10} m$ (Actualmente se encuentra en desuso).

Pasaje :

Una de las dificultades de los estudiantes en Física es como pasar de un múltiplo a su unidad o viceversa.

Nosotros veremos dos formas de realizar este pasaje, la primera más "científica" utilizando potencia de diez; la segunda, más escolar, "corriendo" la coma. Lo importante, en este caso, es que sepa realizar el pasaje sin importar tanto el método que utilice.

En cualquier caso debe PENSAR que si pasa de un múltiplo a otro "inferior", el número "crece" (p. ej.: $40 kg = 40 \cdot 10^3 g$) y si pasa de uno "superior" a otro el número, "disminuye" (p. ej.: $100 g = 0,1 kg$).

Es conveniente también relacionarlo con la vida diaria, p. ej.: "¿1 km es más o menos que 1 m?", "¿3450 g llega a 1 kg (1000 g)?"

Método I :

El cuadro de abajo nos indica la potencia de diez que hay que MULTIPLICAR para pasar DE un múltiplo A otro.

A \ De	K...	h...	da...	Unidad	d...	c...	m...
m...	10^5	10^3	10^4	10^3	10^2	10^1	1
c...	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	1	10^{-1}
d...	10^4	10^3	10^2	10^1	1	10^{-1}	10^{-2}
Unid.	10^3	10^2	10^1	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
da...	10^2	10^1	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
h...	10^1	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
K...	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}

De K... a c... $\Rightarrow$ POR 10^5

A \ De	K...
c...	10^5

De d... a h... $\Rightarrow$ POR 10^{-3}

A \ De	d...
h...	10^{-3}

(Los tres puntos(...) corresponden a la unidad (metro, litro, etc.))

Método II :

a) Realice un cuadro como este.

K...	h...	da...	U.	d...	c...	m...
------	------	-------	----	------	------	------

b) Escriba UNA cifra en cada columna, coincidiendo la "coma" con la línea que se esta a la derecha del múltiplo en que este expresado la magnitud. (Si no tiene coma, ¿dónde está la misma?)
(Si esta expresada en potencia de diez, fracciones u otra forma debe escribirse en decimales.)

c) "Corra" la coma hasta que coincida con la línea a la derecha de la unidad o múltiplo que se desea.

Ejemplo:

K...	h...	da...	U.	d...	c...	m...
40g →		4	0			
0,1m →			0,	1		

⇒ 0,4hg

⇒ 10cm

Problemas:

1.- Realice el pasaje a las unidades correspondientes la siguientes medidas. Escribalas en potencia de diez y en decimales.

a) $I = 6,7 \mu A$. (1)

b) $R = 8,0 m\Omega$. (1)

c) $v = 5,0 \frac{cm}{s}$. (2)

(1.- "A" y " Ω " son unidades, aquí no importa el nombre)
(2.- Pasalo a $\frac{m}{s}$)

2.- ¿Cómo se realiza el pasaje de cm^2 a m^2 ?

3.- La longitud de onda de la luz visible (λ) es entre 4000Å y 7000Å. Exprese la medida en metros y en centímetros, y compárelas con medidas "comunes".

17. Magnitudes

a. Magnitudes (1)

(Ver: "Medidas: 1) Conceptos y ... a. Sobre las medidas" (15))

MAGNITUD	UNIDAD (MKS) (2)			
	Símbolo	Tipo (3)	Dimensión (4)	Símb. (5)
Aceleración	a	V	$L.T^{-2}$	$\frac{m}{s^2}$
- angular	$a\alpha$	SV	T^{-2}	$\frac{rad}{s^2}$
Angulo	α	SV	---	rad *
Cantidad de movimiento	p	V	$M.L.T^{-1}$	$Kg.\frac{m}{s}$
Calor	Q	E	$M.L^2.T^{-2}$	J *
Desplazamiento	Δr	V	L	m
Energía	E	E	$M.L^2.T^{-2}$	J
Fuerza	F	V	$M.L.T^{-2}$	N *
Impulso	J	V	$M.L.T^{-1}$	$Kg.\frac{m}{s}$
- angular	$J\alpha$	SV	$M.T^{-1}$	$Kg.\frac{rad}{s}$
Masa	m	E	M	Kg
Momento de una fuerza	M	SV	$M.L^2.T^{-2}$	N.m
Momento de inercia	I	E	$M.L^2$	$Kg.m^2$
Momento cinético	L	SV	$M.T^{-1}$	$Kg.\frac{rad}{s}$
Posición	r	V	L	m
Presión	p	E	$M.L^{-1}.T^{-2}$	$\frac{N}{m^2}$
Tiempo	t	E	T	s
Trabajo	τ	E	$M.L^2.T^{-2}$	J
Temperatura	T	E		K *
Velocidad	v	V	$L.T^{-1}$	$\frac{m}{s}$
- angular	ω	SV	T^{-1}	$\frac{rad}{s}$
Volumen	V	E	L^3	m^3

b. - Magnitudes "particulares" (1).

MAGNITUD	SIMBOLO	MAGNITUD	SIMBOLO
Altura	h	- interna	U
Ac. de la gravedad	g	Frecuencia	f
Constante de elasticidad	K	Fuerza Normal	N
Deformación	x	- Peso	P
Energía potencial elástica	Epe	- Tensión	T
- - gravitatoria	Epg	Período	T
- cinética	Ec	Trabajo del Peso	τ_P
- mecánica	E _M	- de un resorte	τ_{res}

1.- Magnitudes correspondientes al curso de Mecánica.

Pueden modificarse el significado del símbolo, por ej. que M sea el símbolo de masa. Para evitar confundirse observe el contexto donde se plantea el mismo (que "dice" el problema, las unidades, etc.)

2.- Todas las unidades están en el sistema M.K.S..

3.- T : Tipo de magnitud $\Rightarrow$ V : Vectorial; E : Escalar; SV : Seudovector (En el curso, los pseudovectores son tratados como escalares). (Ver: "Magnitudes Escalares y Vectoriales" [18])

4.- L : Longitud, M : Masa, T : Tiempo.

5.- rad $\Rightarrow$ radián; J $\Rightarrow$ Joule ($J=N.m$); N $\Rightarrow$ Newton ($N=Kg \frac{m}{s^2}$); K $\Rightarrow$ Kelvin.

18. Magnitudes vectoriales y escalares

Magnitudes Escalares y Vectoriales. -

Las magnitudes físicas suelen clasificarse en mag. escalares y mag. vectoriales. Las magnitudes cuyos valores pueden representarse por números reales (ver: "Real" [7]), positivos o negativos, se llaman **ESCALARES** (por ej: masa, temperatura, trabajo, etc.). Las magnitudes cuyas características se determinan tanto por sus dimensiones como por sus direcciones en el espacio, se llaman **VECTORIALES** (fuerza, velocidad, aceleración, etc.) y se representan por vectores.

ESCALARES :

Son magnitudes que se expresan por medio de números reales y una unidad.

Por lo anterior podrían ser mayores o menores a cero (o sea positivos o negativos), pero algunas magnitudes particulares solo pueden ser positivas como la masa, la energía cinética o la variación de tiempo.

Operaciones. - Ver: "Propiedades de la adición y la multiplicación" [8].

Suma (o resta) de Escalares. - El resultado de sumar (o restar) dos escalares entre sí es otro escalar.

Se debe cuidar que:

1) Sean magnitudes del mismo tipo (Se suman masas con masas y no con temperaturas).

2) Tengan la misma unidad. Si una masa es de 10 y otra es de 1000, NO se puede sumar si no tienen la misma unidad, por ej. Kg.

3) Si están escritos en potencia de diez, antes de sumar, cuide que sea la misma para ambos (ver: "Potenciación" [10]).

Multiplicación (o división). -

a) De un ESCALAR por un NUMERO: Es otro escalar del mismo tipo.

b) De un ESCALAR por otro ESCALAR: El resultado es otro escalar cuya unidad es la multiplicación (o división) de ambas unidades.

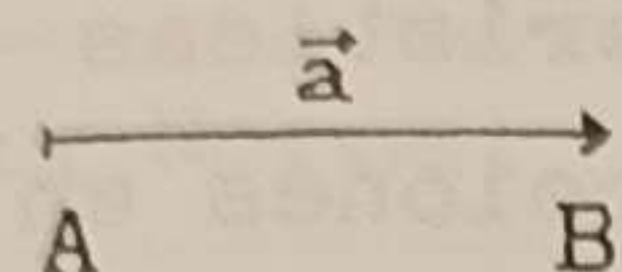
Los escalares cumplen todas las propiedades de los n°. reales.

VECTOR:

Un VECTOR es un seg. de recta orientado, por lo tanto tiene longitud, dirección y sentido. Debe cumplir también con las reglas de las operaciones vectoriales (ver: "suma y resta de vectores" ↓).

* Características. -

Se simboliza por $\vec{AB}$, siendo A el origen y B su extremo, $\vec{a}$ o $\vec{a}$.



1. MODULO, Intensidad. - Es el valor absoluto, la "cantidad" del vector y está dado por la longitud del mismo. Si el vector representa una mag. vectorial además del valor numérico debe aparecer la unidad. (ver: "Magnitudes: unidades")

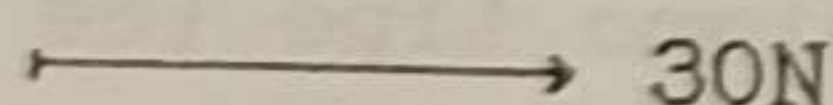
Se escribe " $a = \dots$ " o " $|\vec{a}| = \dots$ " y está representado por la longitud del vector. Esta se debe trazar a ESCALA (Por ej: 1cm $\rightarrow$ 10N (cada 1cm de longitud equivale a 10N de fuerza).

Es conveniente distinguir cuando se habla del módulo (a) o del vector ($\vec{a}$). En este último caso debe incluirse las otras características.

No se pone el valor (30N) al lado del vector; si se desea especificar el mismo (sin utilizar la escala) se escribe aparte.

Ejemplos:

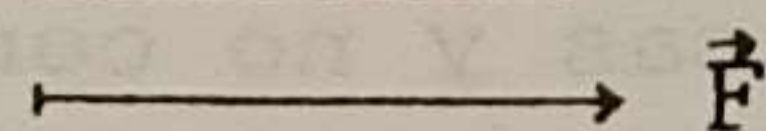
Incorrecto



Incorrecto



Correcto

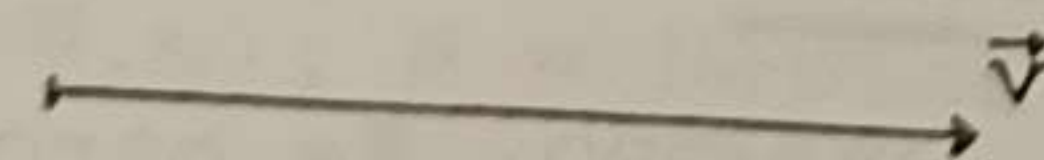


$F = 30N$

Si se tiene representado el vector, se mide su largo y a partir de la escala se determina el módulo.

Ejemplo:

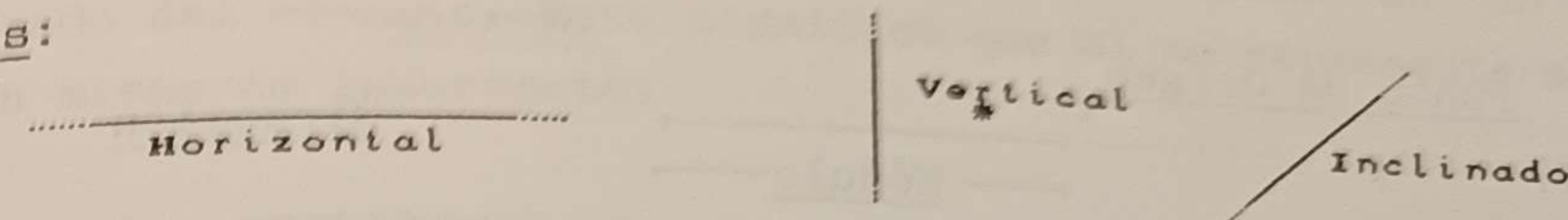
Escala: $30 \frac{m}{s}$



(Otra forma de indicar la escala es hacer equivale tantos "cm" a tantos "N" (o la unidad que corresponda). Por ej.: 1cm $\rightarrow$ 30N)

2. DIRECCION. - Es la recta que contiene el vector. Ej.: Norte-Sur, vertical, horizontal, etc.. En algunos casos se indica el áng. que forma la recta con respecto a un determinado plano, eje, otro vector, etc. (ej.: 30° con respecto a la horizontal).

Ejemplos:

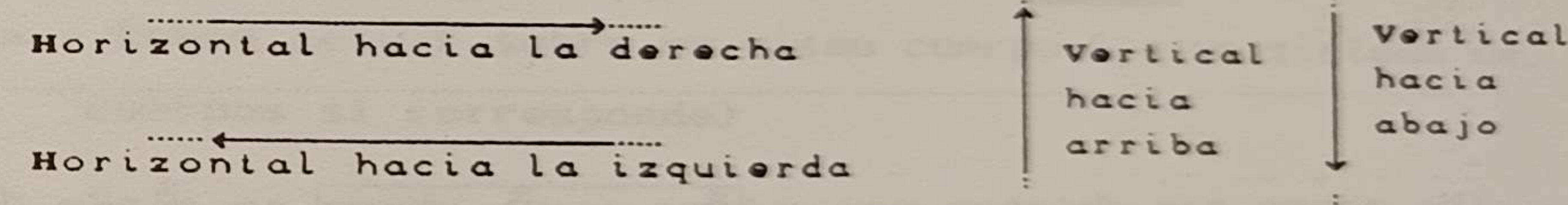


(*.- Para que sea realmente vertical se debe "parar" la hoja.)

3. SENTIDO. - Es hacia donde indica el vector y se señala por una flecha en el extremo del mismo. Ej.: Hacia el norte, hacia abajo.

Observe que en una dirección (una recta) hay dos sentidos posibles (Dirección horizontal, sentido hacia la izquierda o hacia la derecha) y que la dirección NO indica hacia donde es el vector. Cuando uno se pregunta (o le preguntan): "¿Cuál es la dirección de ... ?" La respuesta NO puede ser "HACIA ...". (Cuidado: En algún texto se confunden ambas características o se unifican en una sola)

Ejemplos:



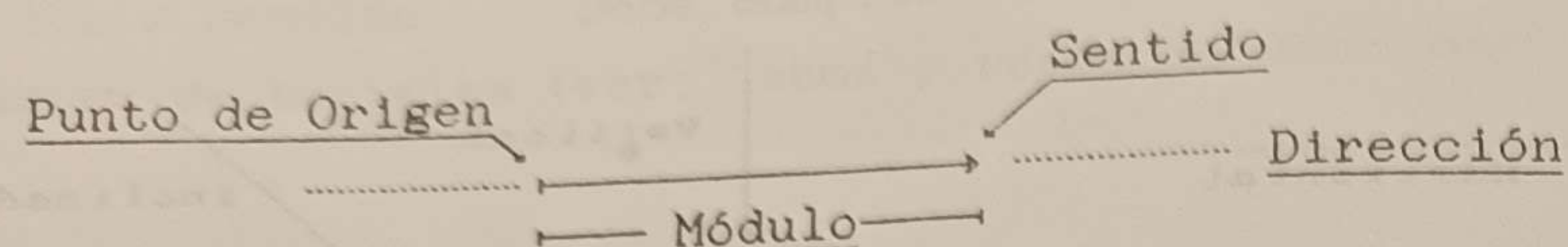
Quando se representan vectores cuya dirección es perpendicular al plano al material de trabajo (pizarrón, cuaderno), no se pueden dibujar y el sentido se establece por convención: si el vector "sale" del plano se indica por "o" y si "entra" por "e". Observe que en este caso NO se puede representar el módulo del vector.

4. PUNTO DE ORIGEN. - Es el lugar donde comienza el vector. En el caso de la fuerza se denomina "Punto de Aplicación" e indica donde se realiza la misma.

Si se trata de un vector fijo su ubicación debe hacerse con mucho cuidado (ver ejercicio B).

Resumiendo:

REPRESENTACION:

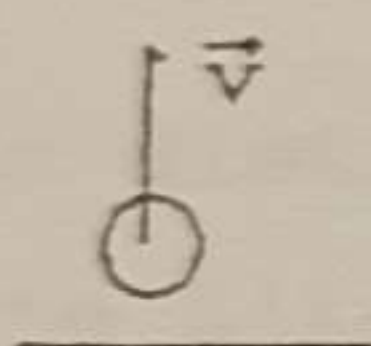


Toda la información sobre el vector se indica en su representación.
(No se escribe "la dirección es ...", "el módulo vale ...", etc.)

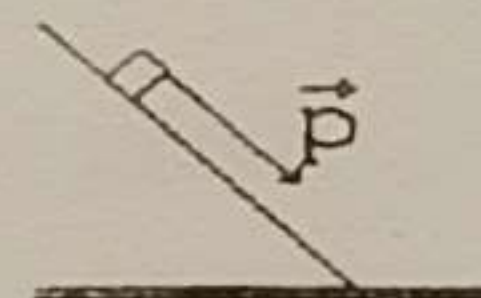
Ejercicios:

A) Escriba la dirección y sentido de los siguientes vectores:

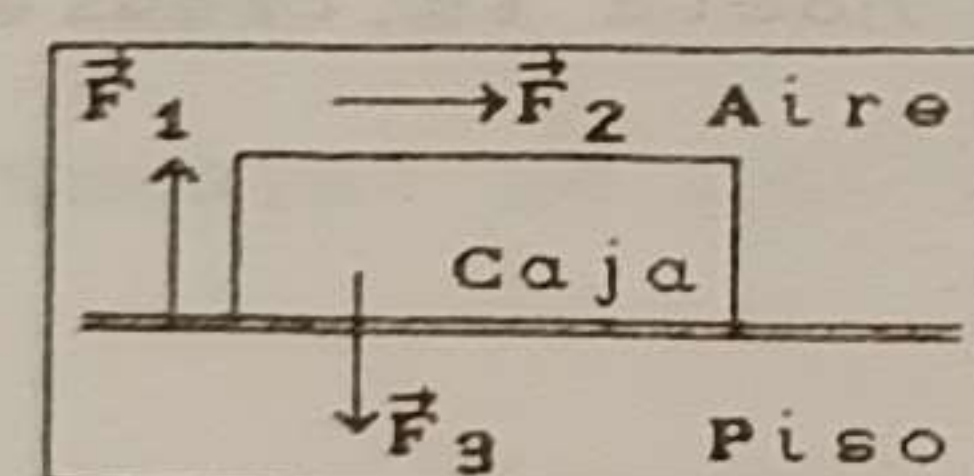
I) Pelota que sube libremente.



II) Caja que cae por un plano.



B) Escriba sobre que objetos se aplica las siguientes fuerzas.



$\vec{F}_1 \rightarrow$
 $\vec{F}_2 \rightarrow$
 $\vec{F}_3 \rightarrow$

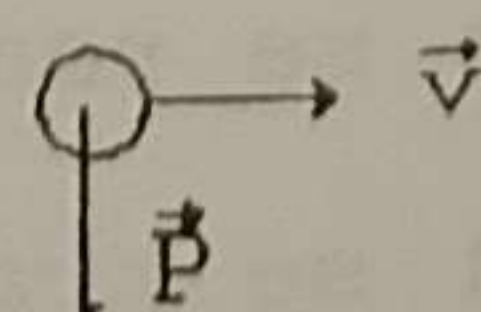
C) Represente un vector de $10 \frac{m}{s}$, horizontal hacia la derecha.

D) Anote las características del siguiente vector.
Escala: $10cm \rightarrow 40N$



E) ¿Cuál de los dos vectores se debe dibujar más grande?

$P = 4,0N$ $v = 50 \frac{m}{s}$



Vector LIBRE. - Es un vector que no varía si se mueve paralelamente a sí mismo, de modo que su origen caiga en cualquier punto del espacio.

Vector FIJO. - Es un vector cuyo origen está fijado en un punto determinado del espacio. Esto significa que si se representa en otro lugar la misma es incorrecta.

Vector AXIAL o DESLIZANTE. - Es el que puede trasladar solo a los puntos situados a lo largo de su dirección.

Vector UNITARIO. - Es el vector cuyo módulo es igual a 1 o la unidad.

Vectores OPUESTOS. - Son vectores de igual dirección y módulo, y sentido contrario.

$$\vec{A} = -\vec{B} \quad \vec{A} = \vec{B}$$

SUMA DE VECTORES. -

Si son mag. vectoriales:

- Deben actuar sobre un mismo cuerpo (o un sistema de cuerpos si corresponde)
- Solo se puede sumar vectores entre sí.
- Deben ser del mismo tipo de mag. (Fuerzas con fuerzas).
- Se deben "cuidar" las unidades, la potencia de diez (ver) así como todas las carac. vectoriales de los sumandos. Si están representados se debe saber la escala.
- La mag. resultante es otro VECTOR del mismo tipo (fuerza (Al ser un vector se debe expresar todas sus características (NO alcanza con decir su módulo))).

Importante: La suma de vectores no se realiza sumando sus módulos. Si se suma dos escalares de $3,0Kg$ y $4,0Kg$ el resultado es $7,0Kg$, si se suma dos números (3 y 4) el resultado es un solo (7), en cambio si se suman dos vectores de $3,0N$ y $4,0N$ el resultado puede ser cualquier valor entre $1,0N$ y $7,0N$. Esa es la razón de todo este planteo.

FORMA DE RESOLUCION :

Encontrar el vector resultante significa que se puede sustituir un conjunto de vectores (con las características indicadas arriba) por uno solo que produce el mismo efecto. Esto implica que desde el vector resultante, los vectores sumando ya no estarían más.

Existen varios métodos para la obtención del vector resultante. Independientemente del método utilizado, el vector va a tener las mismas características (módulo, dirección, sentido, punto de origen) por lo tanto el problema no pasa por la elección del método "correcto" sino por el que le sea más sencillo.

Hay dos formas de resolución el mét. analítico y el mét. gráfico.

I) Método ANALITICO. -

Es una resolución a partir de ecuaciones en función de los datos que se posea y las incógnitas que se piden. Tanto uno como otro varían en cada situación (ver esquema ↓).

Para el alumno tiene como positivo que es más "mecánica" su resolución pero tiene una serie de inconvenientes:

- Debe dominarse una gran cantidad de ecuaciones.
- Se debe saber aplicar en cada caso particular.
- NO evita la representación del vector.
- Su resultado no es más "seguro" que el obtenido por el otro mét.. (A veces parece existir más seguridad en las "fórmulas" que en el "dibujo").
- A través de las ecuaciones, por lo menos en los niveles iniciales, es muy difícil que el alumno comprenda que está sucediendo físicamente. En este sentido el método gráfico aparece como más claro. (Justamente es a partir de estos cursos que espera que el alumno sepa interpretar a las ecuaciones.

II) Método GRAFICO (*). -
(*.-No confundir con GRAFICA)

El método se basa en la representación, a escala, de los vectores para poder operar con ellos.

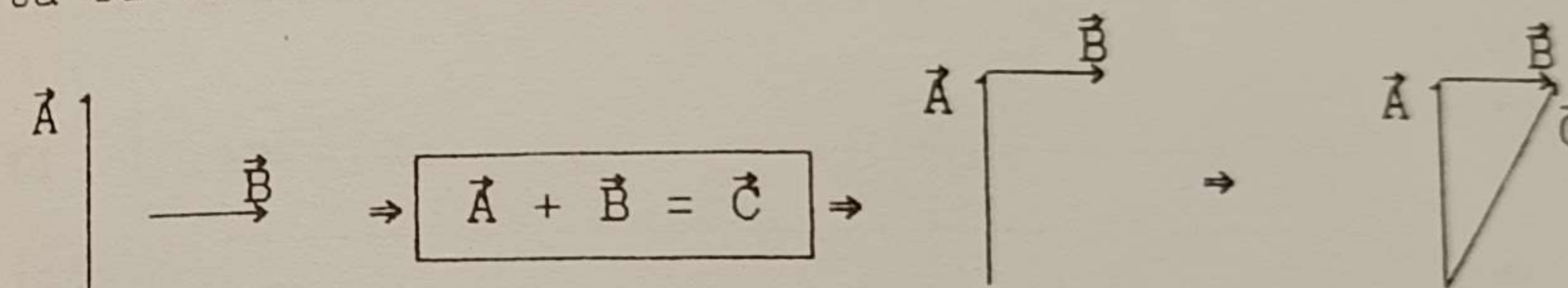
Para utilizar este es necesario saber, justamente, representar vectores, conocer geometría (por eso hay un capítulo) y saber trabajar y tener los instrumentos necesarios (semicírculo, compás, etc.).

Dentro del mét. gráfico hay dos formas posibles de resolución:

II.a) Método del POLIGONO. -

Se une un vector consecutivamente con el otro (el extremo de uno con el origen del siguiente). Para esto ubique un punto a partir del cual dibuja un vector (el orden no importa, ¿por qué?).

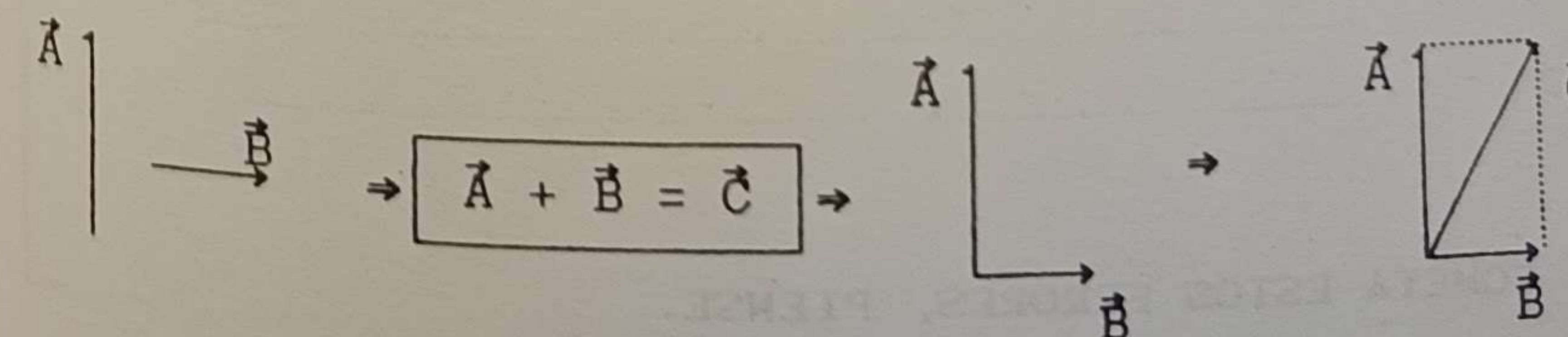
El vector resultante se traza desde el origen del primero hasta el extremo del último.

II.b) Método del PARALELOGRAMO. -

La idea es formar un paralelogramo cuyos lados diferentes son los vectores "sumandos" y la diagonal es el vector "resultante".

Para esto:

- 1) Traslade los dos vectores dados tal que coincida su punto de origen (o aplicación). Para trace un punto que puede estar en un lugar determinado que se destaca o puede ser elegido por Ud.
- 2) Del extremo de cada vector trace un segmento de recta "punteado" (llamada línea auxiliar), paralelo y de igual longitud que el otro vector. Se formará un paralelogramo.
- 3) El vector $\vec{C}$ coincide con la diagonal que va desde el punto de intersección de los orígenes hasta el punto de corte de las líneas auxiliares. (CUIDADO: NO confunda las diagonales)

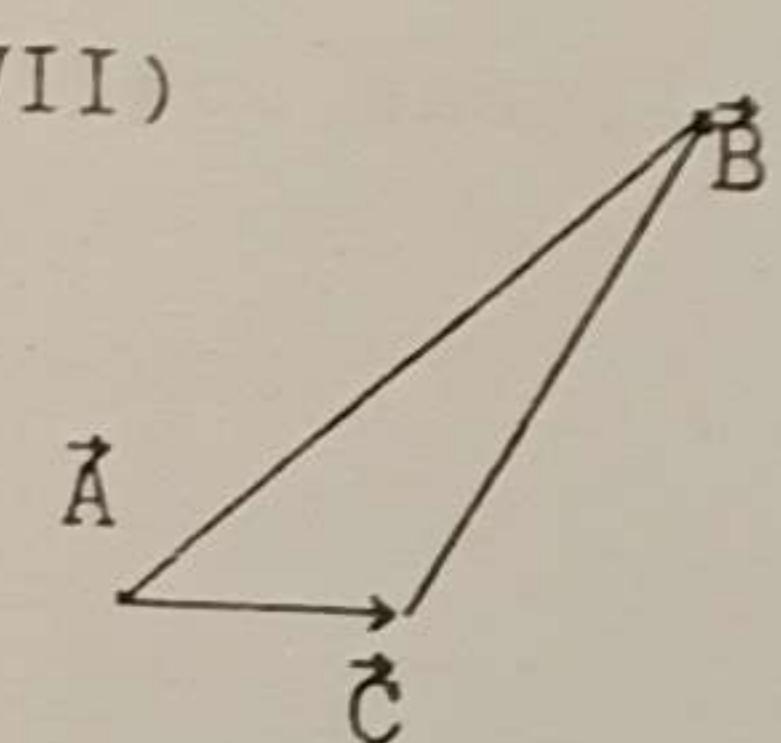
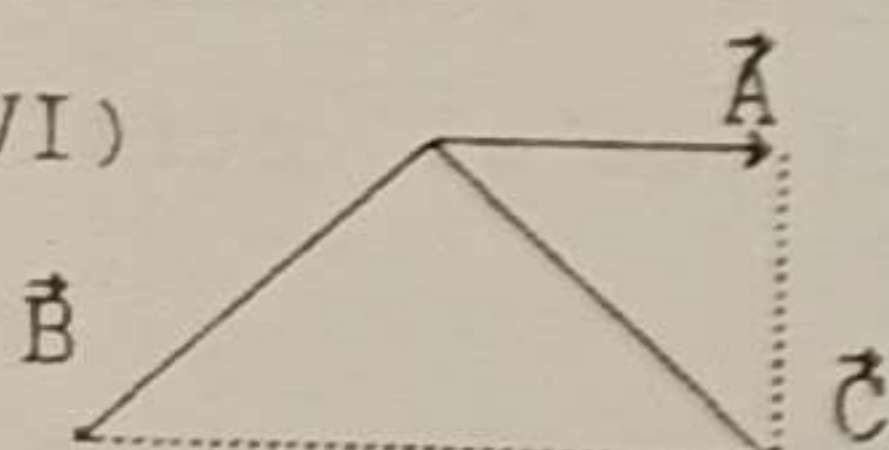
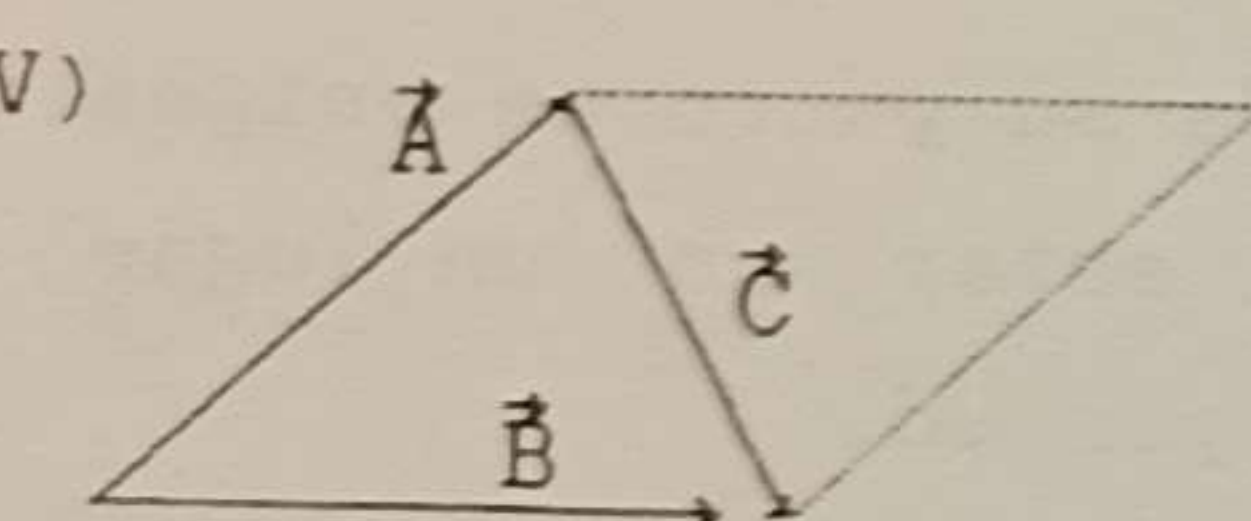
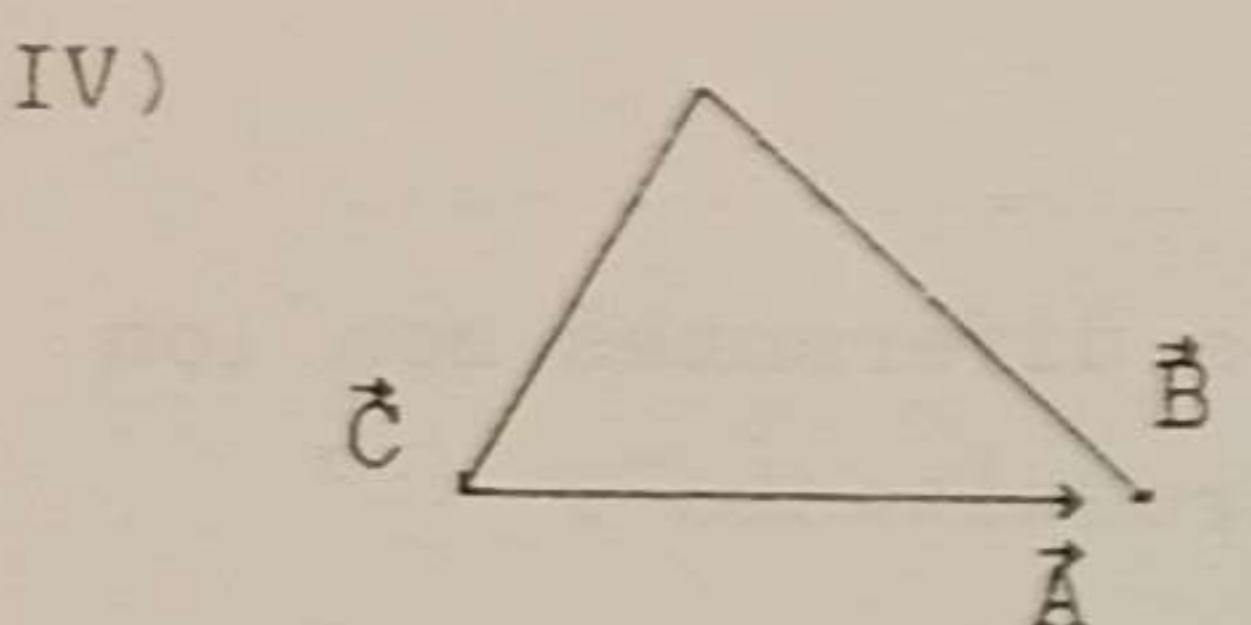
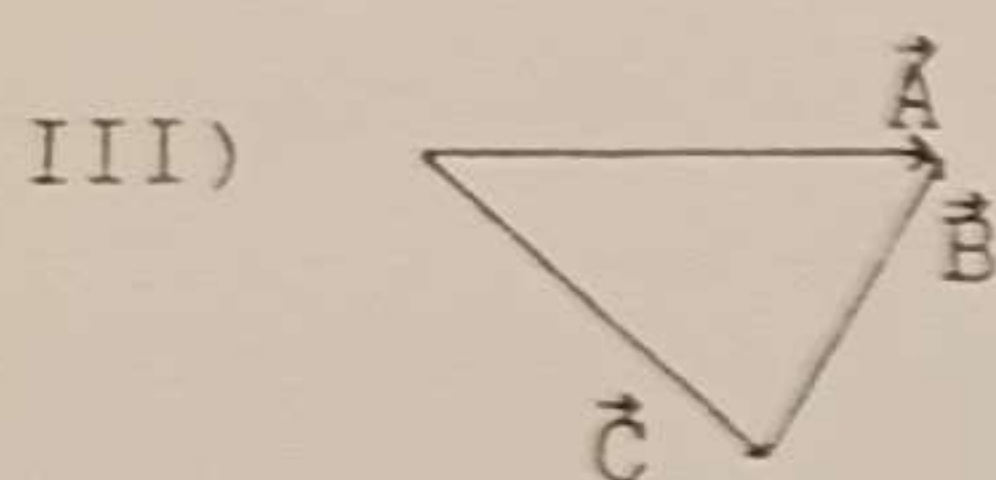
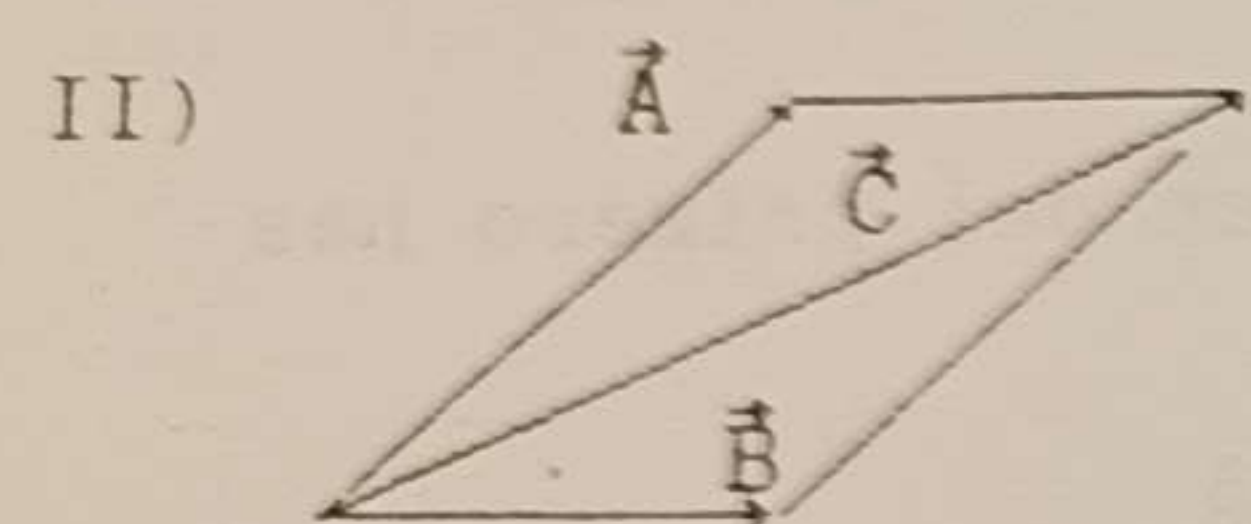
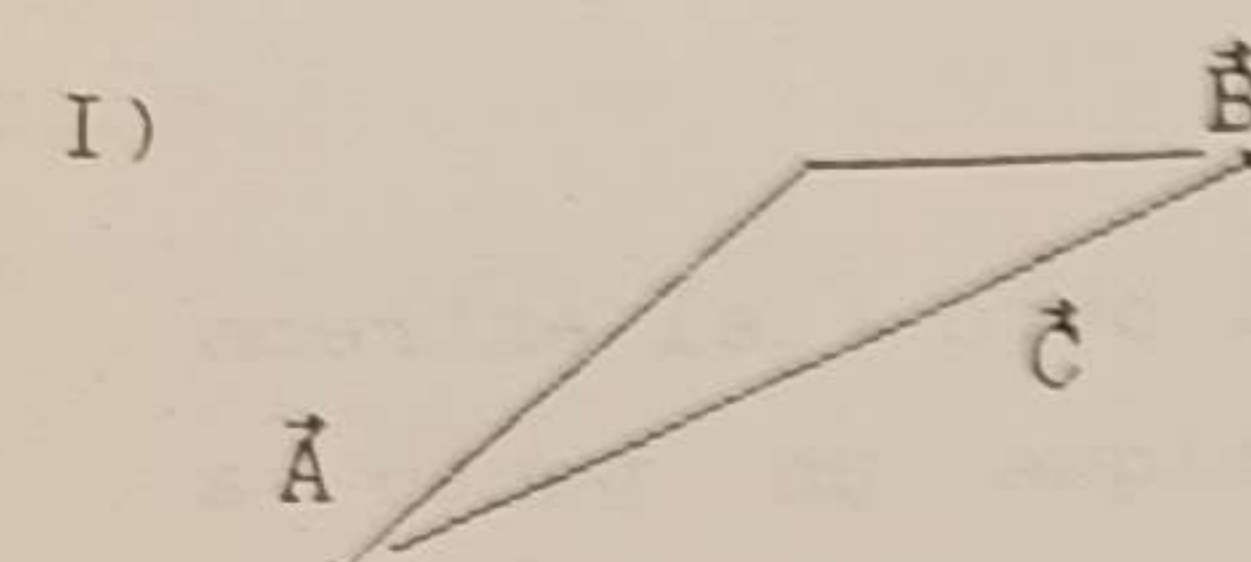


PROBLEMA:

Se han sumado los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, dando como resultado el $\vec{C}$ y al realizar la misma se han cometido una serie de errores al aplicar los métodos de resolución.

Indique al lado de cada figura el método que "supuestamente" se utilizó y todos los errores que se han cometido al aplicarlo. Si tiene duda de cuál es el método, analicelo según sea para uno u otro.

Recuerde: $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$



NO COMETA ESTOS ERRORES, PIENSE.

SUMA DE 2 VECTORES COPLANARES. -

$$\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$$

El siguiente es un esquema donde se plantean los casos particulares más importantes y sus diferentes formas de resolución.

Se llama vectores coplanares porque todos los vectores están en un mismo plano.

I. - DIRECCION: IGUAL SENTIDO: IGUAL ANGULO(1): 0°

Ejemplo	Mét. Analítico	
	$C = B + A$	
Mét. Paralelogramo	Método Gráfico	Mét. Polígono

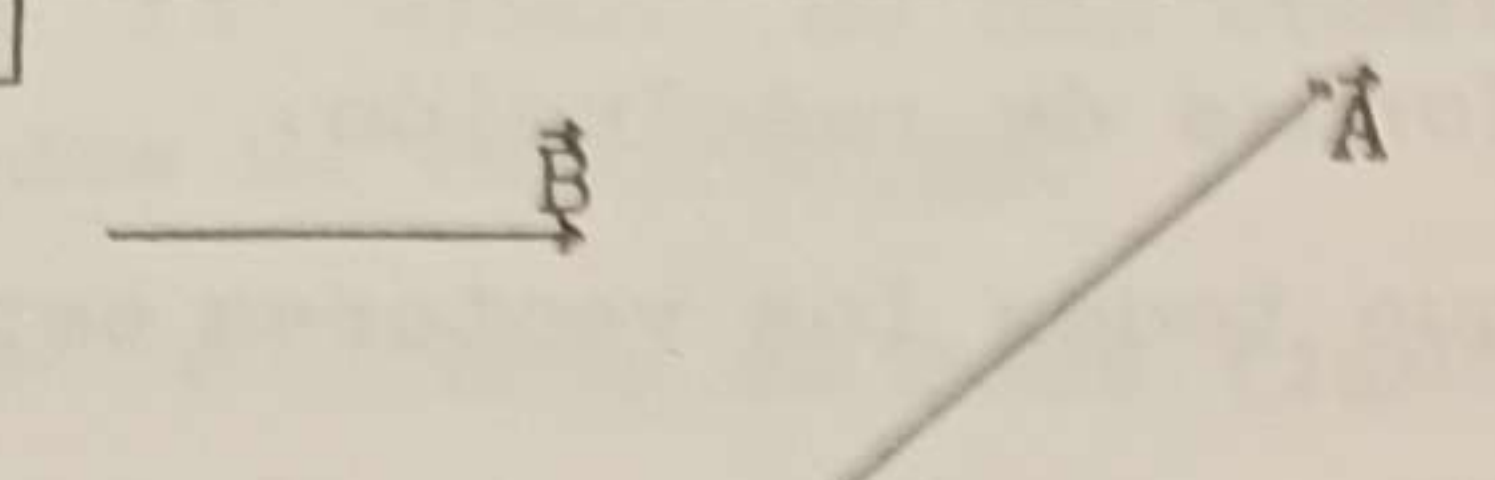
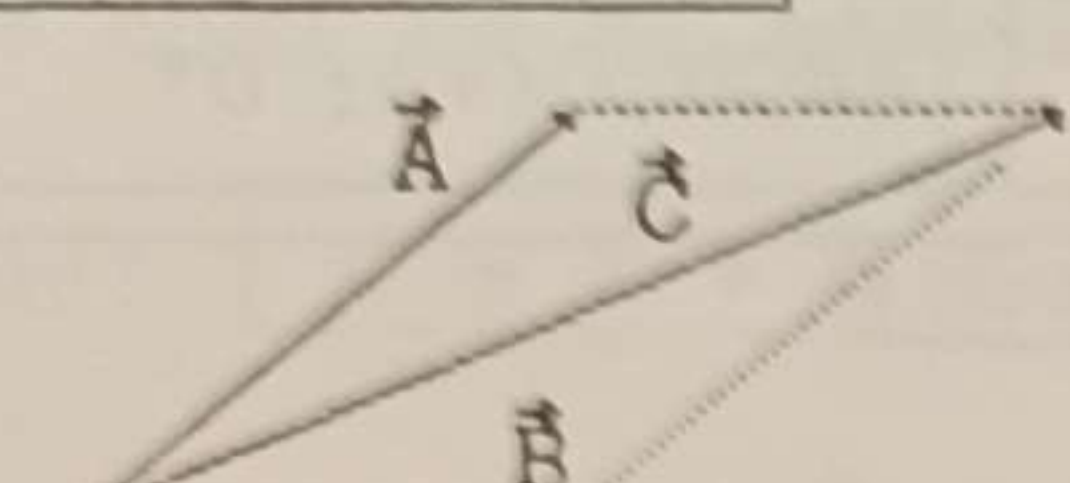
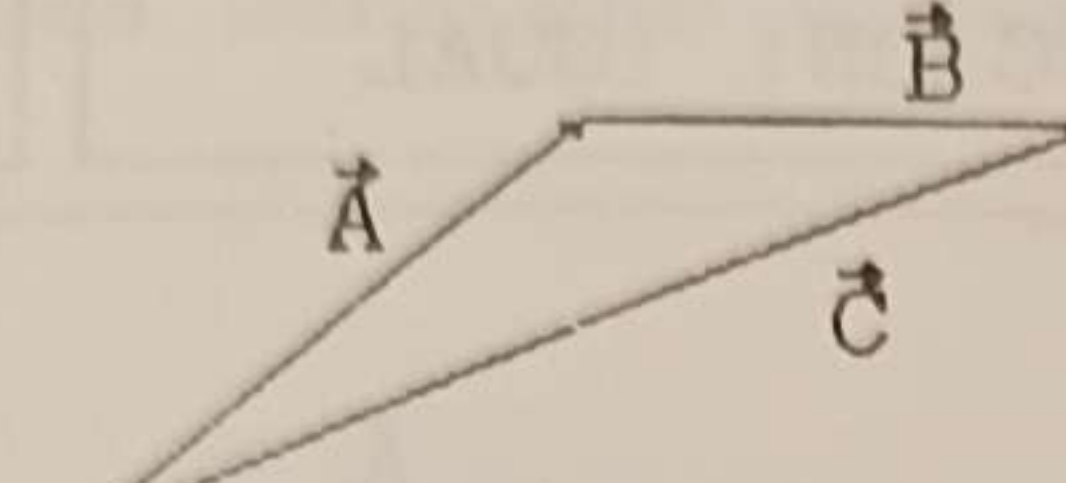
II. - DIRECCION: IGUAL SENTIDO: CONTRARIO ANGULO(1): 0°

Ejemplo	Mét. Analítico	
	$C = B - A$	
Mét. Paralelogramo	Método Gráfico	Mét. Polígono

III. - DIRECCION: PERPENDICULAR SENTIDO: ----- ANGULO(1): 90°

Ejemplo	Mét. Analítico	
	$C = \sqrt{A^2 + B^2}$ $\text{tgr} = \frac{A}{B}$	
Mét. Paralelogramo	Método Gráfico	Mét. Polígono

IV. - DIRECCION: DISTINTA SENTIDO: CUALQUIERA ANGULO(α): ?

Ejemplo	Mét. Analítico
	$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos \alpha}$ $\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha = -\cos \beta$
Mét. Paralelogramo	Mét. Polígono
	

1) El áng. menor entre los vectores cuando coincide su punto de origen.
2) Los vectores están superpuestos.
Sugerencias: Para los casos I) y II) utilice el mét. analítico y para los casos III) y IV) el mét. gráfico.
(Recuerde que en todos los casos los debe representar)
Para el caso III) se pueden aplicar las líneas trigonométricas.

Problemas.-

- A) ¿En qué caso el módulo del vector resultante es igual a la suma de los módulos de los vectores sumandos?
B) Se suman dos vectores de 20N y 40N, ¿Cuánto vale el módulo del vector resultante?
C) Demuestre que la ecuación para obtener el módulo resultante en el caso IV sirve para todos los casos.

Mag. Vectoriales con IGUAL DIRECCION. - En muchos casos sucede que todas las mag. vect. tienen la misma dirección, con lo cual la complejidad vectorial se simplifica, especialmente en la suma y la resta.

En este caso se plantean dos situaciones (los dos sentidos) que se tratan en forma similar a los escalares, asignándole el signo positivo a un sentido y el negativo al otro. Esta elección es arbitraria y tiene como único fin diferenciar un sentido del contrario. Por ej. para una dirección horizontal, se le puede asignar hacia la derecha el "positivo" y hacia la izquierda, el "negativo".

A partir de esto se puede deducir que:

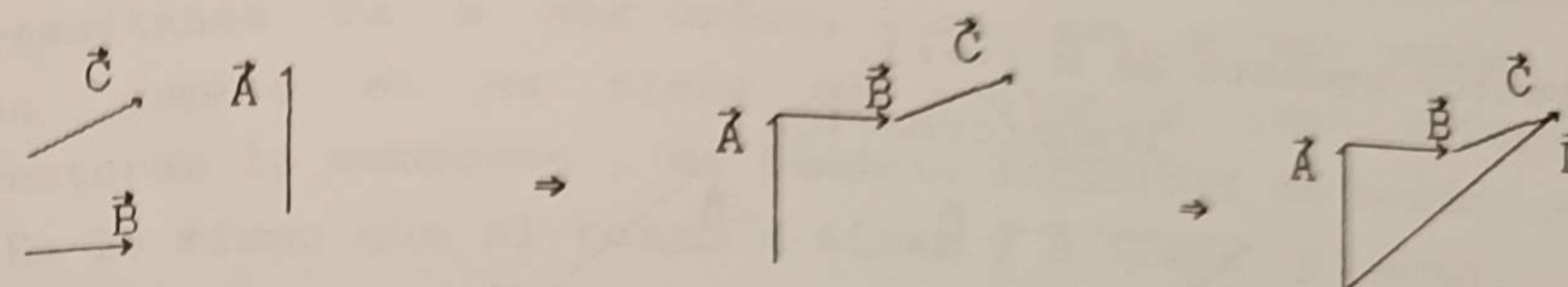
- a) Cuando tenemos una magnitud, el signo del módulo nos dice el sentido de la misma. En nuestro ej. si $v = -10 \frac{m}{s}$, el sentido es hacia la izquierda.
b) Si todas las mag. tienen el mismo sentido, a este se le atribuye el signo positivo.
c) Si las mags. vectoriales tienen diferentes direcciones, NO se puede "hablar" de positivo o negativo.

Suma de 3 o más vectores:

$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{D} \quad (*)$$

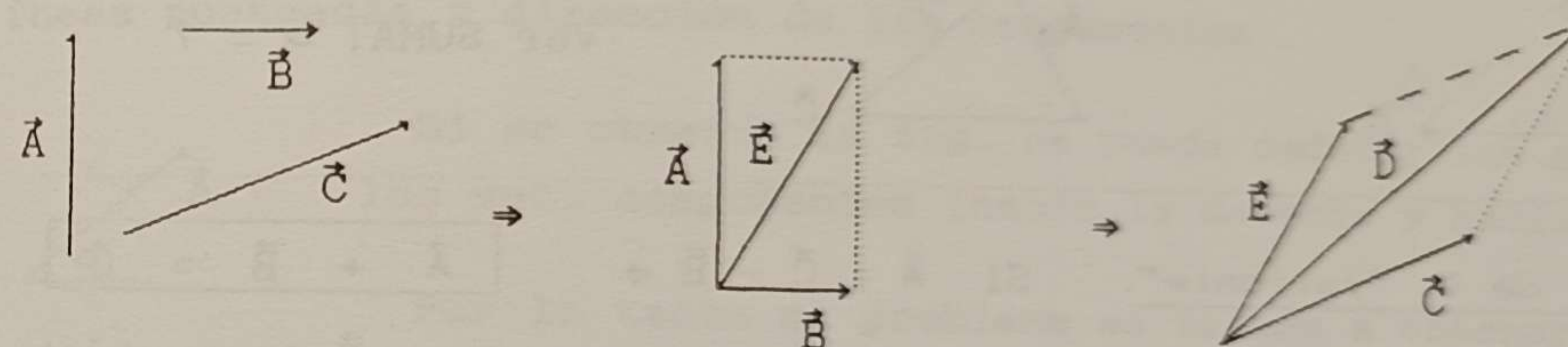
Método del POLIGONO:

El método es el explicado arriba (ver).



Método del PARALELOGRAMO:

Se suma dos vectores y a la resultante se le suma el tercero.

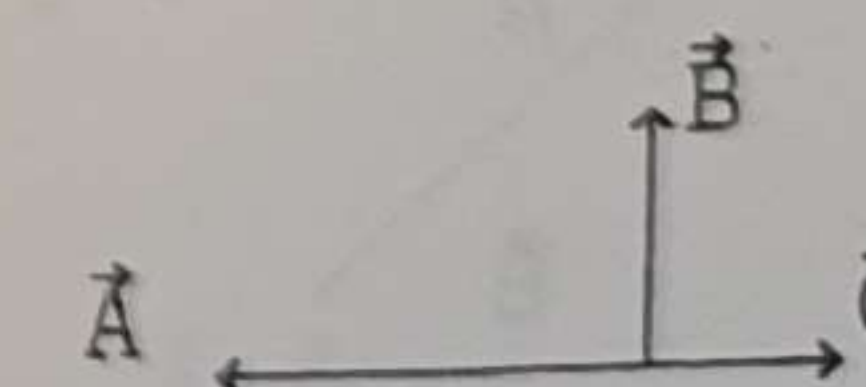


*Observe que el método del polígono es mucho más sencillo que el del paralelogramo.

*¿Cómo se aplicaría el método analítico?

En algunos casos el vector resultante conviene obtenerlo por la conjunción de varios métodos.

Ejemplo:



(*) - Se hace para tres vectores. Ud. debe generalizarlo.)

RESTA DE VECTORES. -

(Relea SUMA)

Forma tipo:

$$\vec{A} = \vec{C} - \vec{B}$$

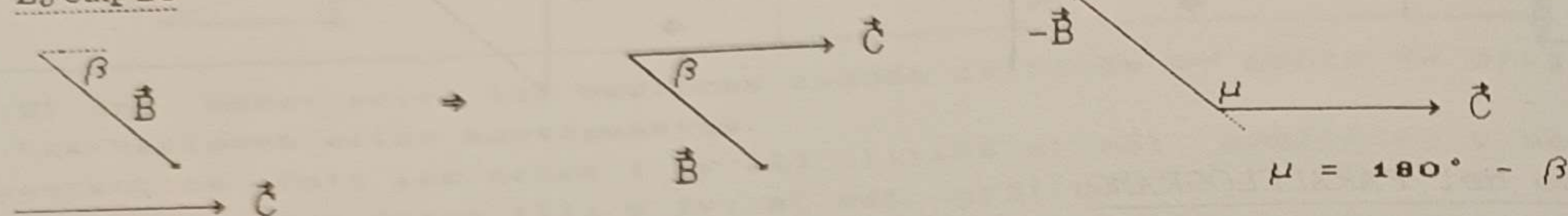
Forma de Resolución:

1) Se transforma en una SUMA:

$$\vec{A} = \vec{C} - \vec{B} \Rightarrow \vec{A} = \vec{C} + (-\vec{B})$$

donde $-\vec{B}$ es el vector opuesto de $\vec{B}$ (ver).

Ejemplo

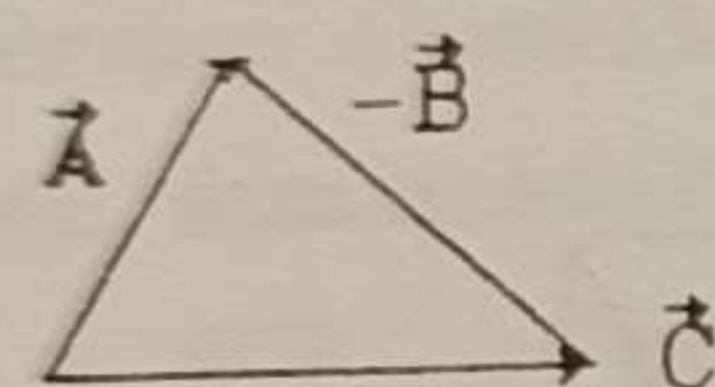


Resoluciones:

I) M. Paralelogramo

II) M. Polígono

III) M. Analítico



Ver SUMA: $\alpha = ?$

2) A partir de lo "faltante":

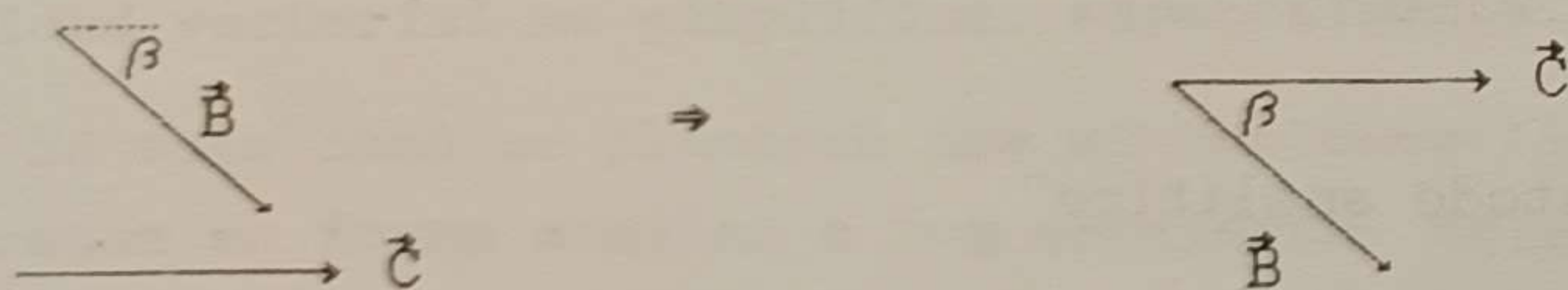
$$\text{Si } \vec{A} = \vec{C} - \vec{B} \Rightarrow$$

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

por lo tanto hay que obtener un vector ($\vec{A}$) que sumado a $\vec{B}$ (conocido) dé el vector $\vec{C}$ (conocido).

Ejemplo

Transformación



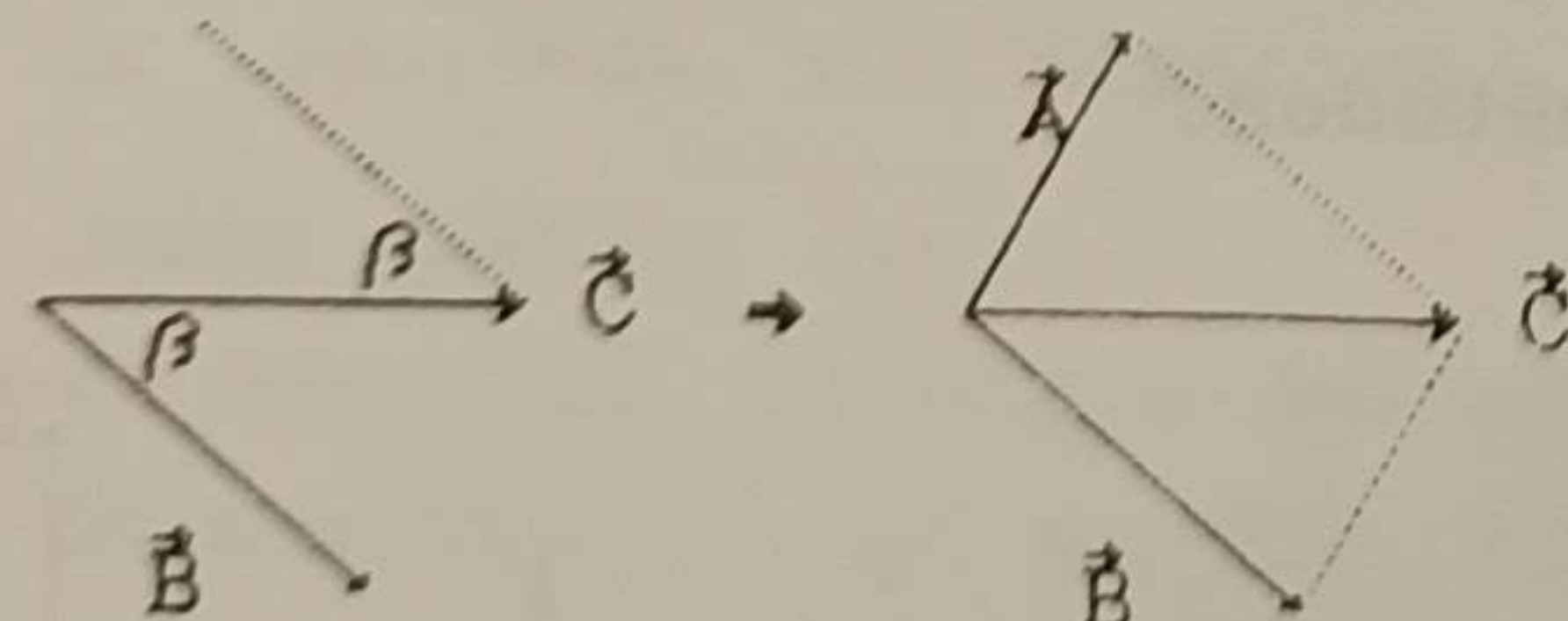
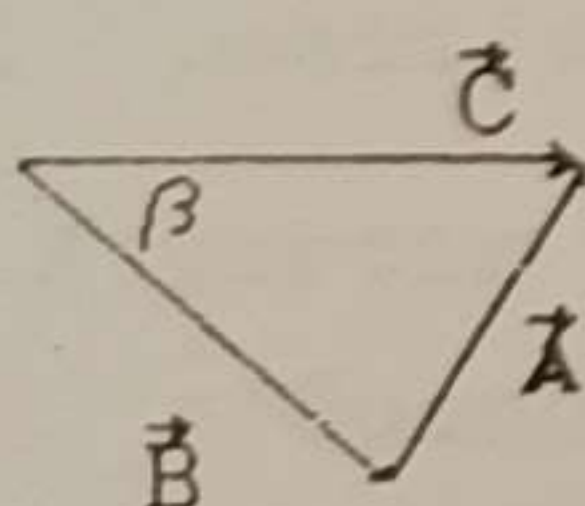
Resoluciones:

I) M. Polígono

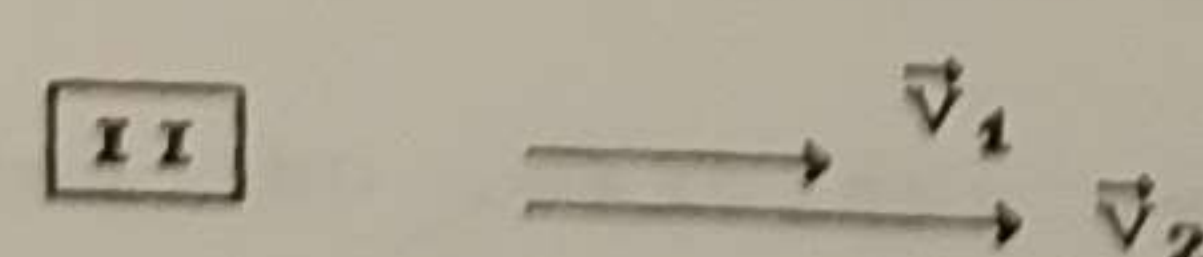
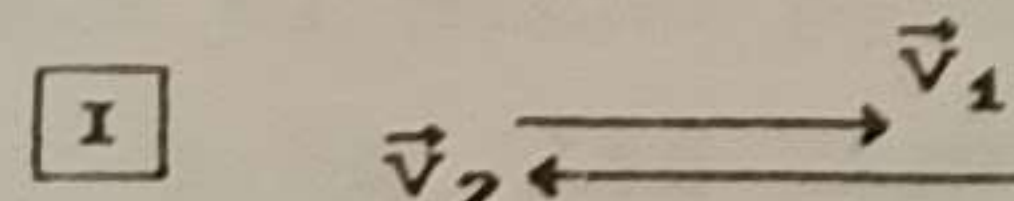
II) M. Paralelogramo

III) M. Analítico

Ver SUMA: $\alpha = ?$



Realice la resta de los sig. vectores en los dos casos ($v_1 = 3 \frac{m}{s}$, $v_2 = 4 \frac{m}{s}$).

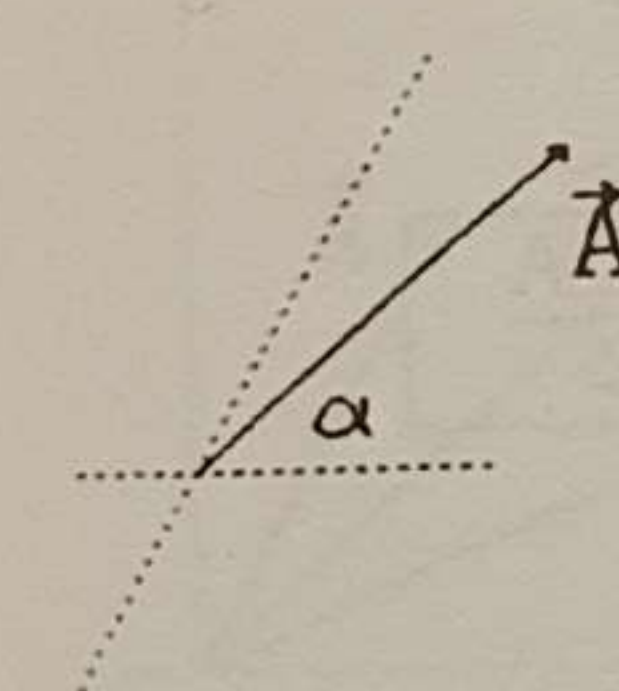


DESCOMPOSICION DE VECTORES. -

Si se tiene el vector resultante, ¿cómo se puede obtener los vectores sumandos?, o lo que es similar: ¿cómo se obtiene las componentes que forman un vector?

Si se tiene dos vectores y se sabe operar, el vector resultante va a ser único, (es ese y no puede ser otro), en cambio si se tiene el vector y se quiere saber que vectores lo componen, se tendría infinidad de soluciones posibles. (Es lo mismo que si tengo 4 tizas y 3 tizas y sumo, el resultado solo puede ser 7 tizas; en cambio, si me dicen que tengo 7 tizas en dos bolsas, existen varias soluciones posibles: 0+7, 1+6, 2+5, etc.)

Para superar lo anterior se debe dar más información como son las direcciones de los vectores componentes a través de un esquema y/o el ángulo que forman con el vector (ver fig., líneas punteadas = dirección de las componentes).



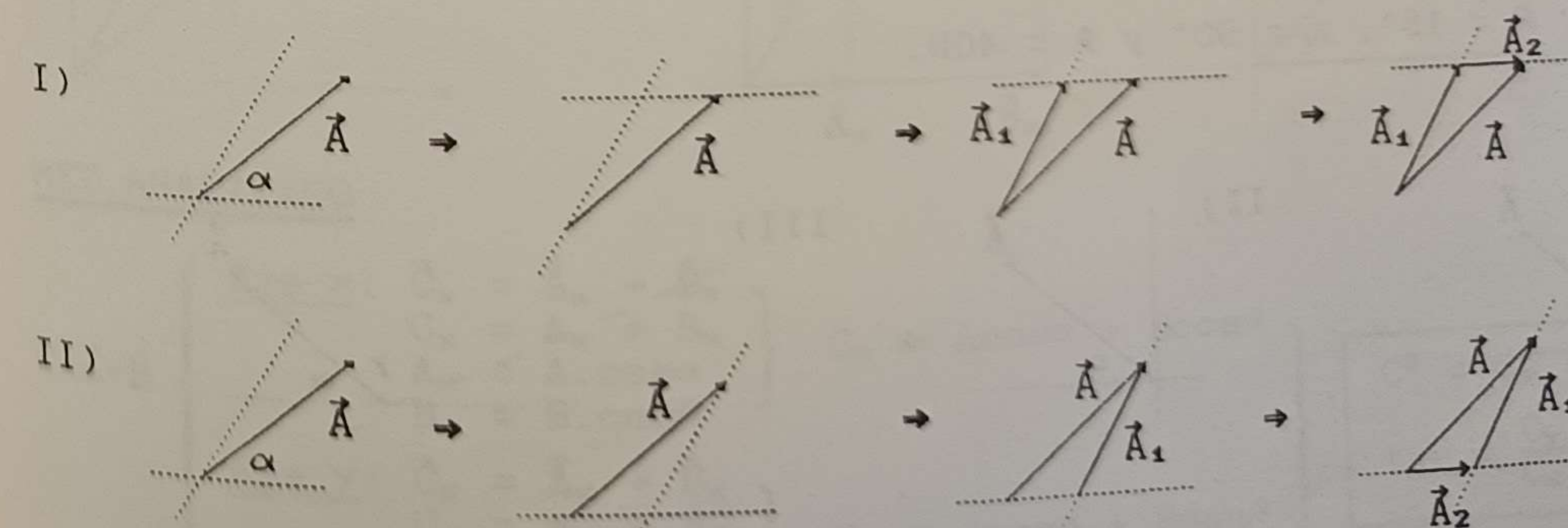
Si se observa la fig. se puede deducir los sentidos de los vec. componentes (hacia la derecha y hacia arriba).

Por lo tanto el problema se reduce a obtener los módulos de los mismos y para eso hay que representarlos.

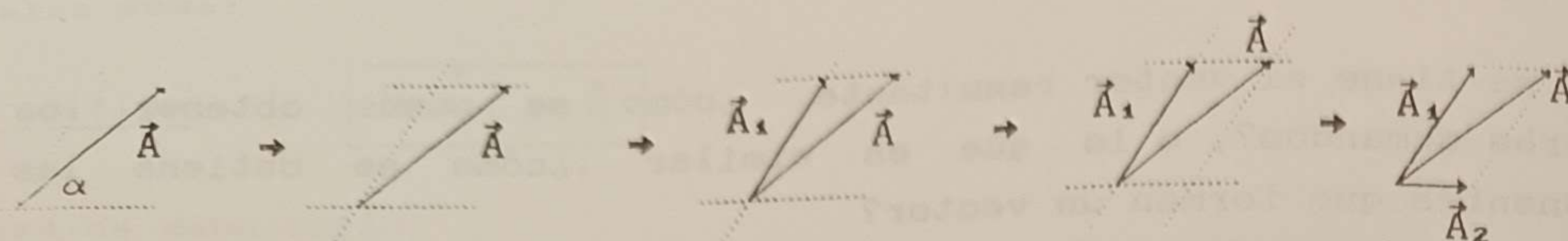
(El mét. NO va a ser redactado, conociendo lo anterior, razone)

$\vec{A}$ es el vector (conocido) y, $\vec{A}_1$ y $\vec{A}_2$ las componentes (incógnitas).

METODO DEL POLIGONO

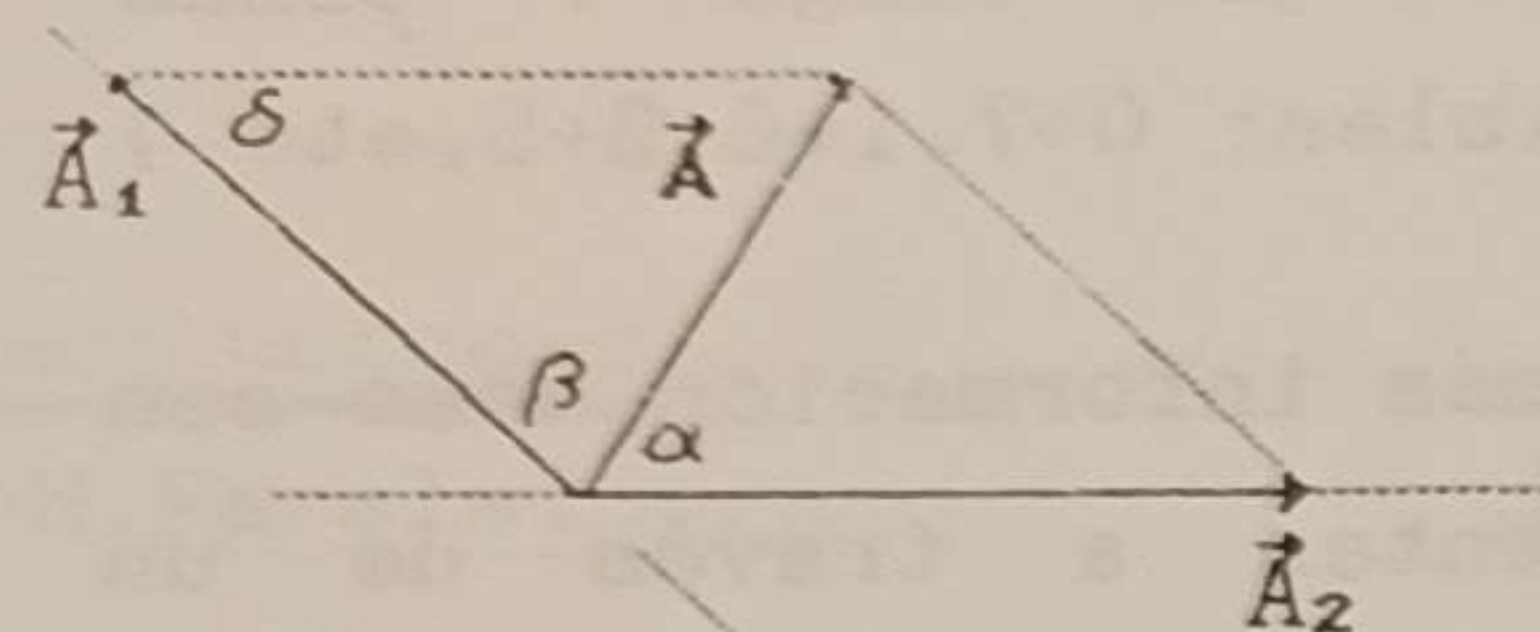


METODO DEL PARALELOGRAMO



METODO ANALITICO

Representación:



Datos:

A, α y β

$\mu = \alpha + \beta$

$\delta = 180^\circ - \mu$

$\text{sen} \mu = \text{sen} \delta$

$\text{cos} \mu = -\text{cos} \delta$

Incógnitas:

A_1 y A_2 .

Por el Teorema del Seno (*):

$$\frac{\text{sen} \delta}{A} = \frac{\text{sen} \beta}{A_1} \Rightarrow A_1 = \frac{\text{sen} \beta \cdot A}{\text{sen} \delta}$$

$$\frac{\text{sen} \delta}{A} = \frac{\text{sen} \alpha}{A_2} \Rightarrow A_2 = \frac{\text{sen} \alpha \cdot A}{\text{sen} \delta}$$

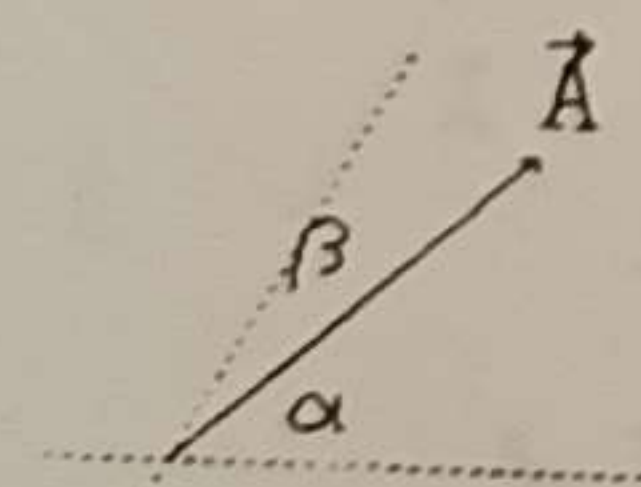
(*.-Ver en Geometría, Triángulo NO rectángulo)

Problema:

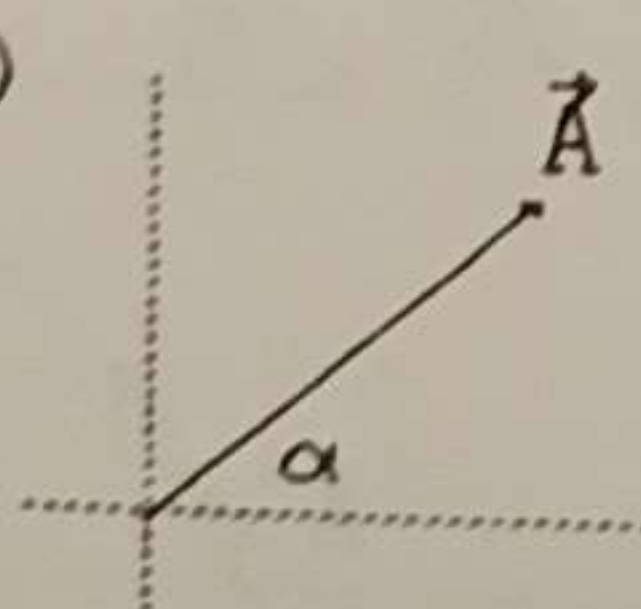
Obtenga las componentes, por el método gráfico, en los casos siguientes:

$\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$, $\gamma = 90^\circ$ y $A = 40\text{N}$.

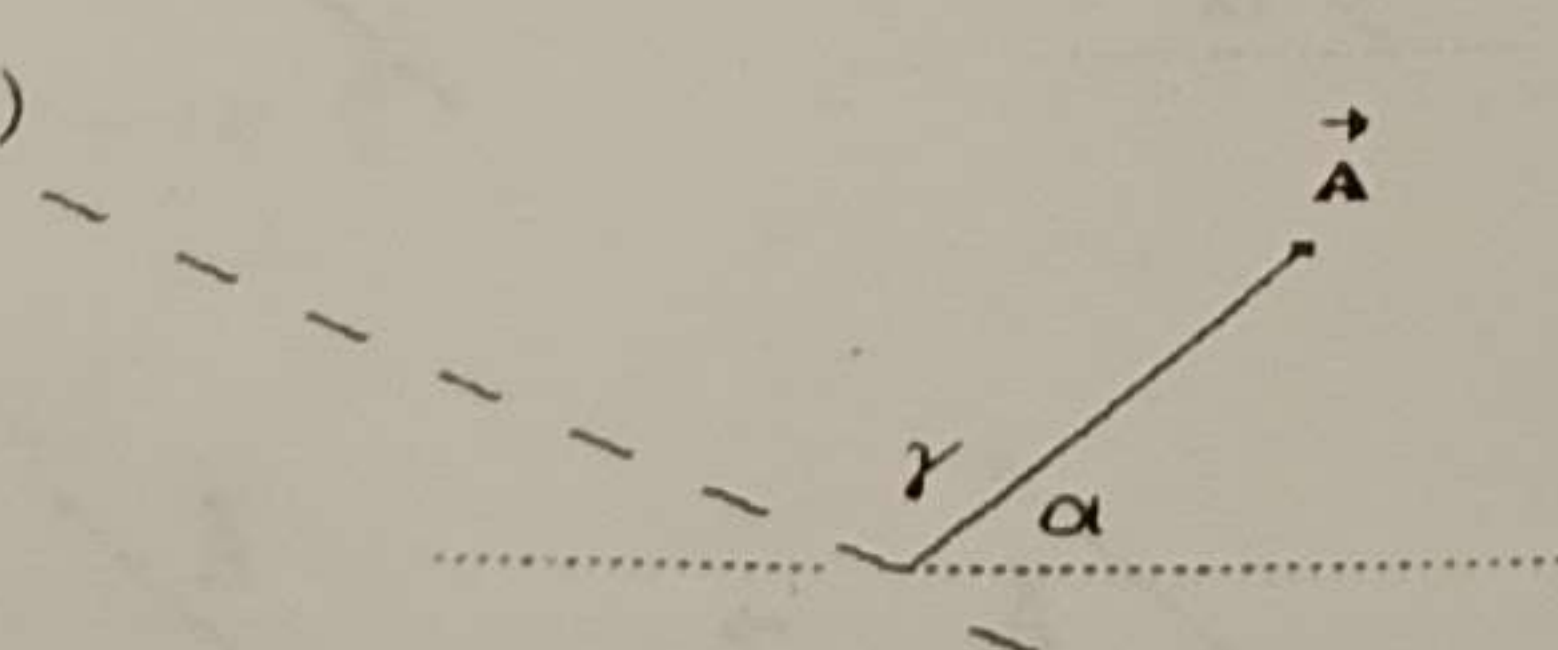
I)



II)



III)



SUMA DE VECTORES POR DESCOMPOSICION:

Tomaremos un caso particular pero de uso común en Física que es considerar los dos ejes perpendiculares (90°) para las componentes de $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$.

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow \text{Eje } x: \vec{C}_x = \vec{A}_x + \vec{B}_x \quad \text{Eje } y: \vec{C}_y = \vec{A}_y + \vec{B}_y$$

α , β y γ son los ángulos respectivos de los vectores A, B y C con respecto al eje x (figs. I, II y III).

Fig. I

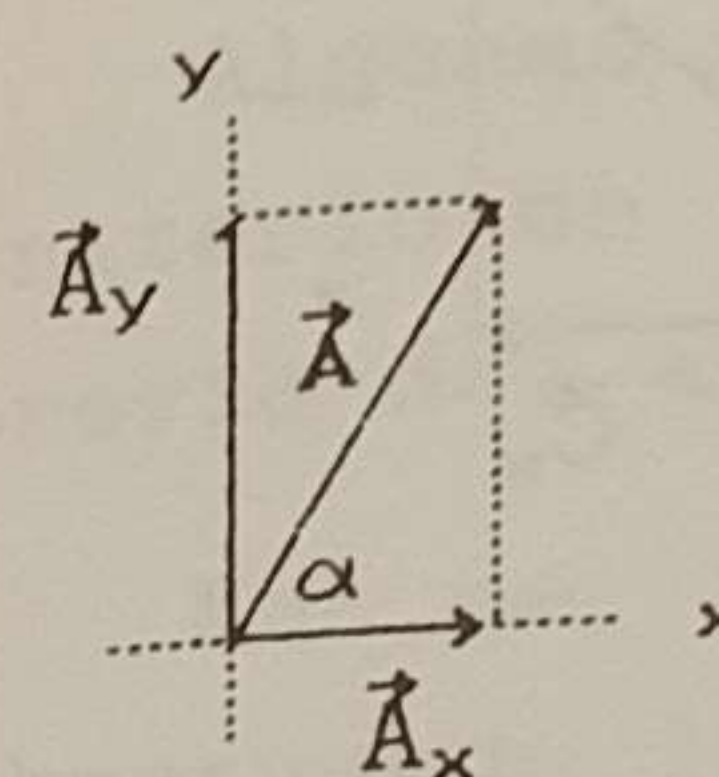


Fig. II

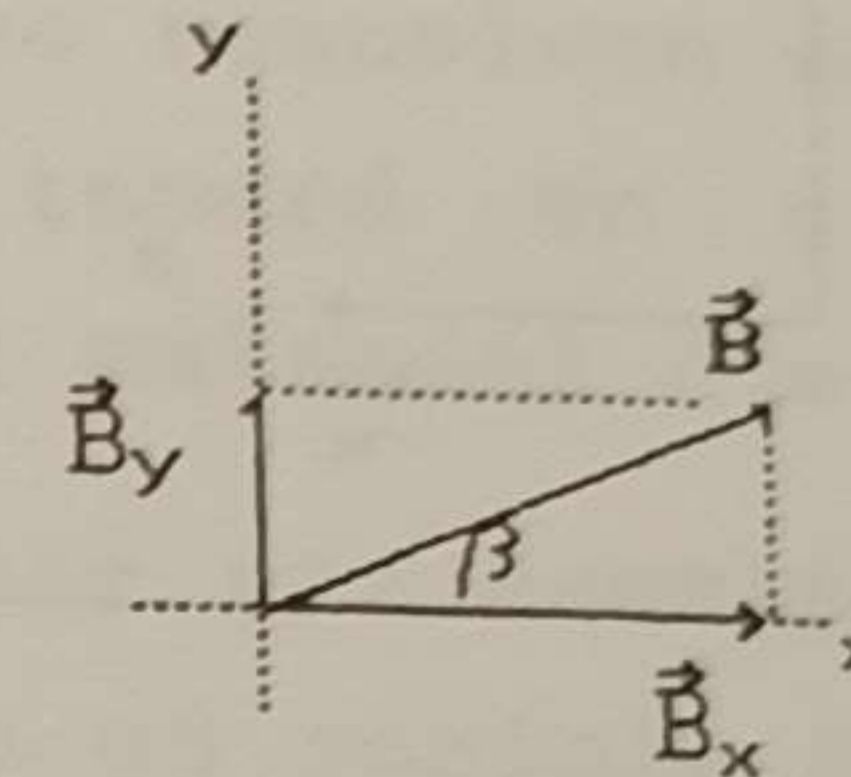
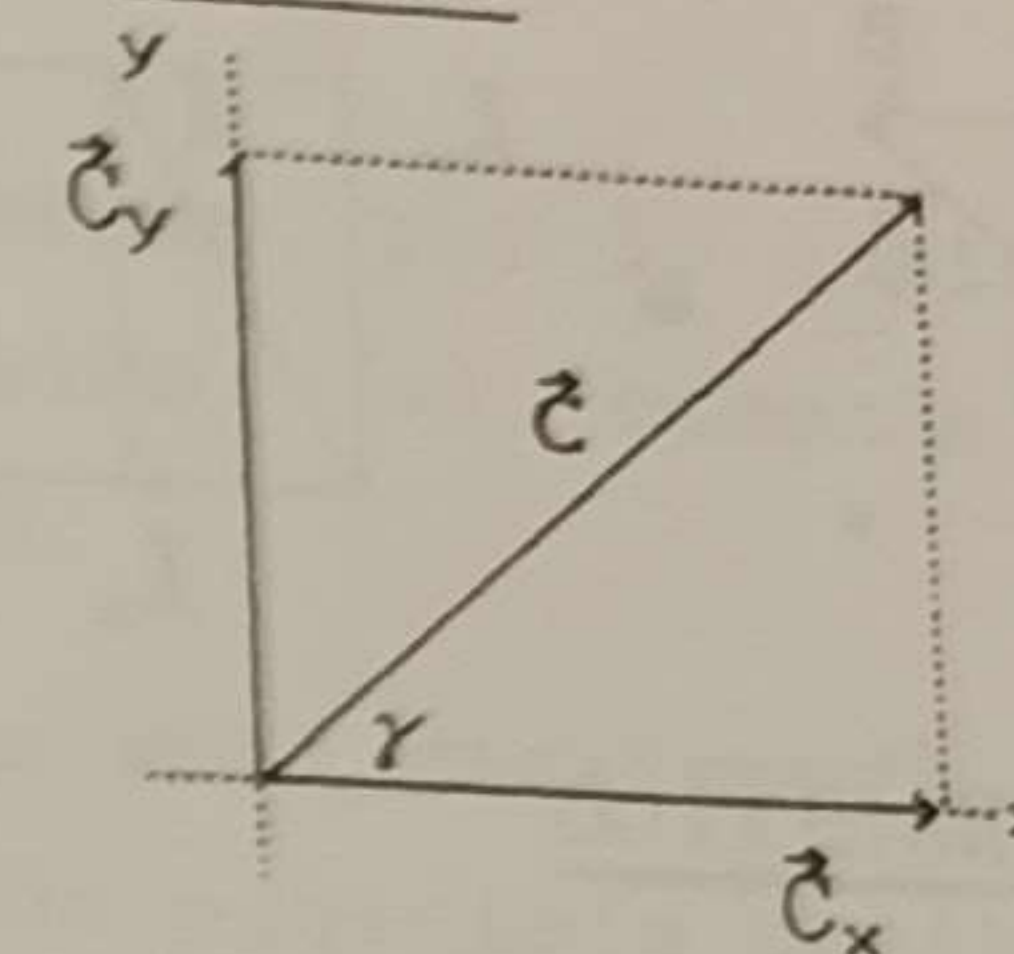
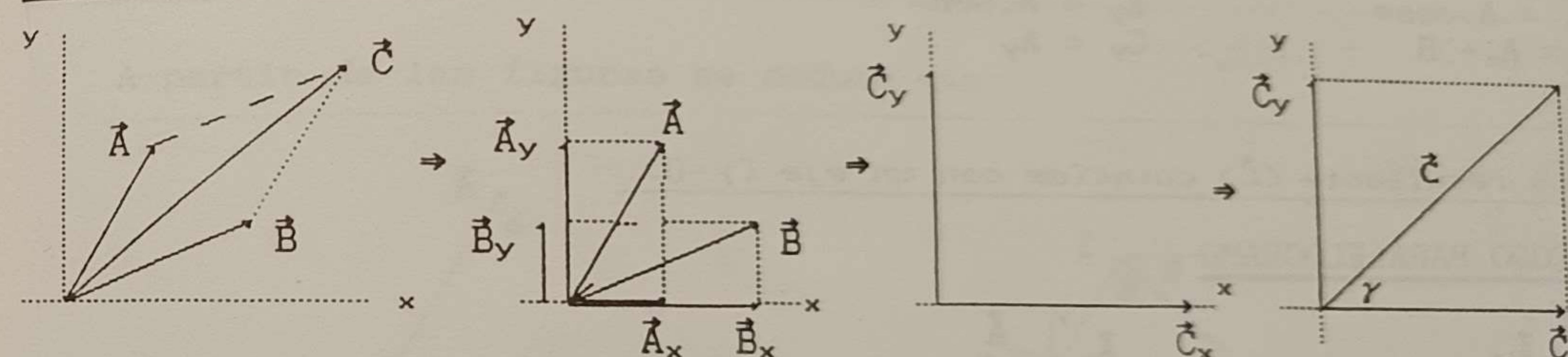


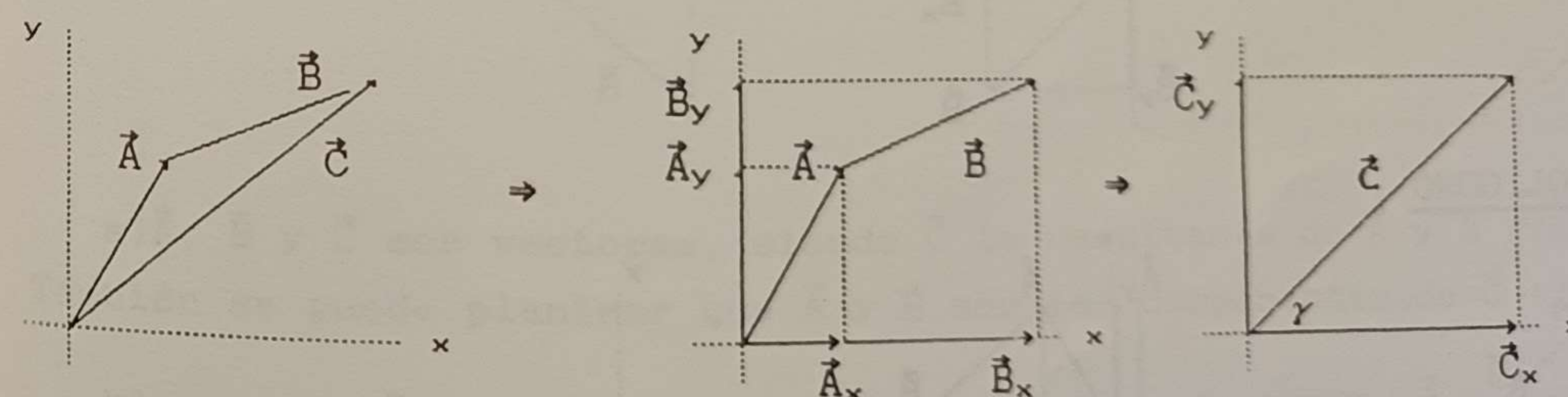
Fig. III



METODO PARALELOGRAMO :



METODO POLIGONO

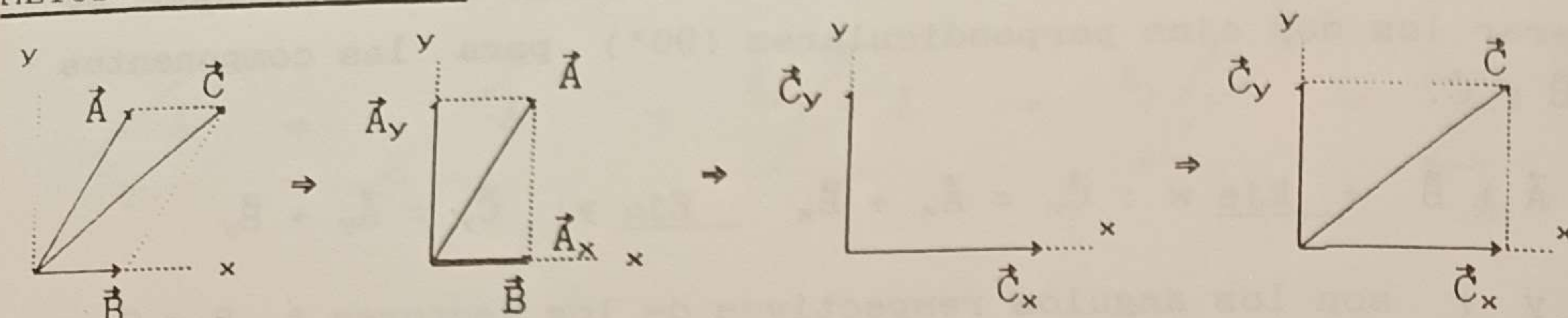


MET. ANALITICO

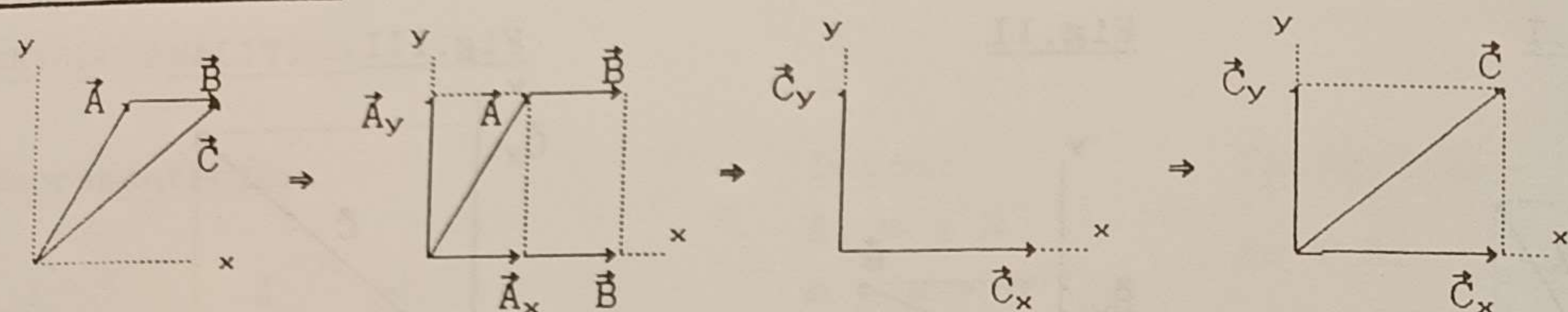
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \left\{ \begin{array}{l} \text{Eje } x: \vec{C}_x = \vec{A}_x + \vec{B}_x \\ C_x = A_x + B_x \\ A_x = A \cdot \cos \alpha \\ B_x = B \cdot \cos \beta \\ \text{Eje } y: \vec{C}_y = \vec{A}_y + \vec{B}_y \\ C_y = A_y + B_y \\ A_y = A \cdot \text{sen} \alpha \\ B_y = B \cdot \text{sen} \beta \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} C_x = A \cos \alpha + B \cos \beta \\ C_y = A \text{sen} \alpha + B \text{sen} \beta \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} C^2 = C_y^2 + C_x^2 \\ \text{tg} \gamma = \frac{C_y}{C_x} \end{array} \right.$$

A) Una componente (B) coincide con un eje ($\beta=0$). -

METODO PARALELOGRAMO



METODO POLIGONO



Método ANALITICO

Eje x:

$$B_x = B (\cos\beta = 1)$$

$$A_x = A \cos\alpha$$

$$C_x = A_x + B$$

Eje y:

$$B_y = 0 (\sin\beta = 0)$$

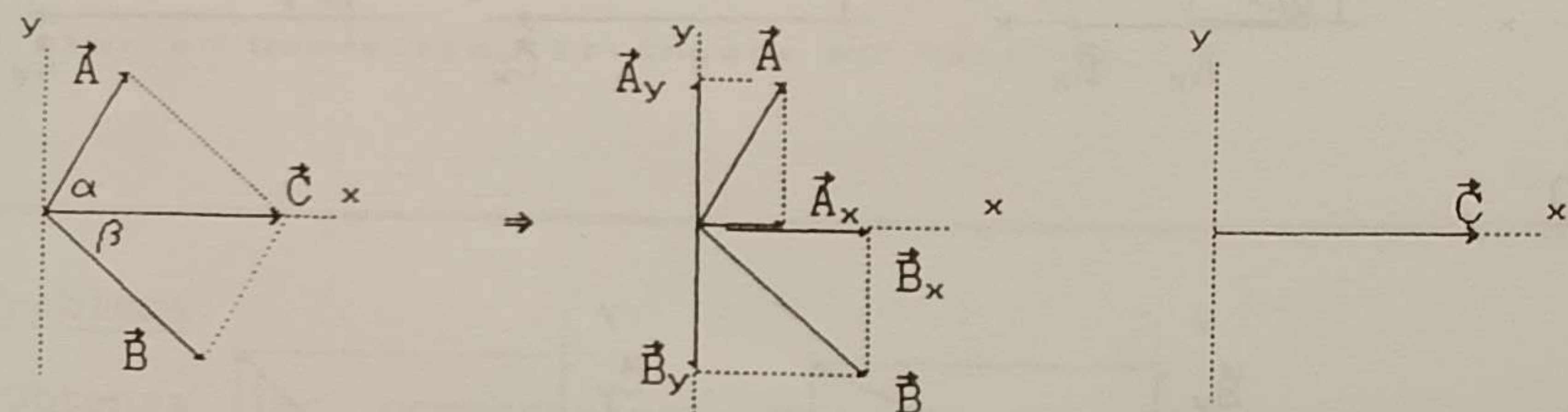
$$A_y = A \sin\alpha$$

$$C_y = A_y$$

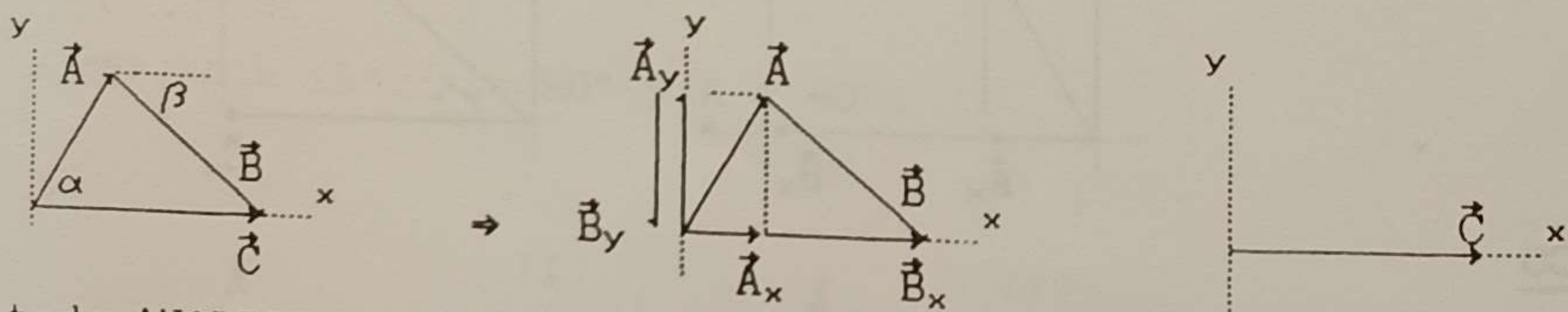
C y tgy ver ↑

B) La resultante (C) coincide con un eje ($\gamma=0$). -

METODO PARALELOGRAMO



METODO POLIGONO



Método ANALITICO

Eje x

$$B_x = B \cos\beta, A_x = A \cos\alpha$$

$$C_x = A_x + B_x \quad [C = C_x]$$

Eje y

$$B_y = B \sin\beta, A_y = A \sin\alpha, C_y = 0$$

$$C_y = A_y - B_y \rightarrow [A_y = B_y]$$

Analice las situaciones anteriores para la RESTA.

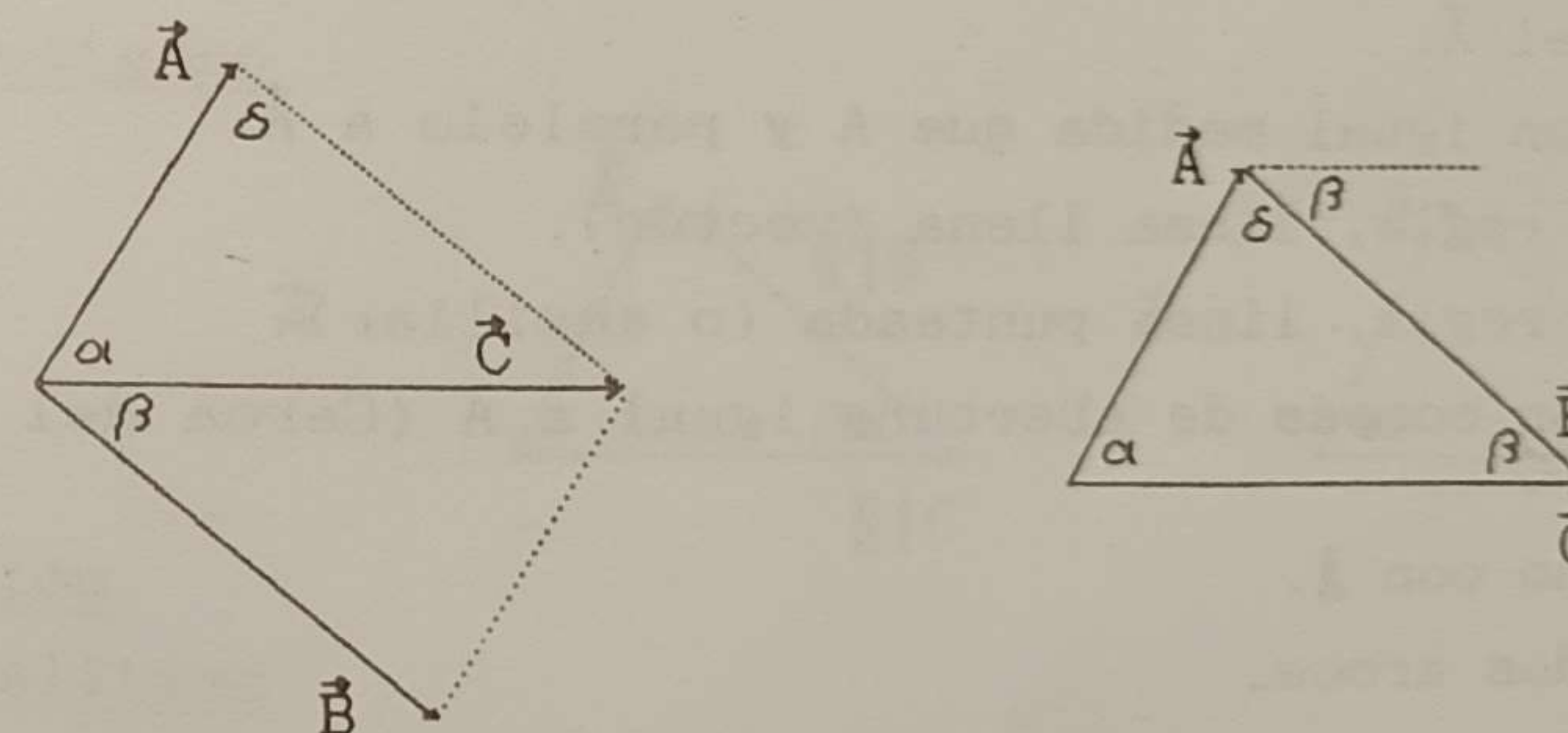
SITUACIONES:

Esta parte es para que el alumno razone que herramientas posee y como se utilizan para superar las diferentes situaciones que se le pueden plantear. Es decir, teniendo algunas magnitudes como incógnitas y otras como datos, que mecanismos tiene para obtener las primeras. NO es cuestión de aprenderse de memoria las mismas sino que hay que COMPRENDERLAS, pensar y hasta prever cuál es la(s) forma(s) de solución.

Algunas de ellas se resuelven de varias formas, por lo tanto, el criterio de elección tendrá en cuenta, también, el conocimiento previo del alumno y el material que este posea.

No se va explicar por escrito lo que se está realizando, pero observando las figuras es posible deducirlo. Un ejercicio posible es que Ud. lo haga.

A partir de las figuras se deduce que:



a) $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son vectores, siendo $\vec{C}$ la resultante de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (VER ↑). También se puede plantear que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son las componentes de $\vec{C}$ (VER ↑).

b) α y β son los ángulos que forman, respectivamente, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con $\vec{C}$. También: $\mu = \alpha + \beta$ y $\delta = 180^\circ - \mu$.

c) Por lo anterior: $\sin\mu = \sin\delta$ y $\cos\mu = -\cos\delta$.

d) Se aplica el teorema del seno y el coseno (Ver: "Geometría" [13])

Por lo tanto las magnitudes son: $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, α , β , μ y δ .

Si elegimos $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$, α y β (*), tendremos las siguientes combinaciones:

Situación $\Rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\vec{A}$	X	X	X	X	X	X				
$\vec{B}$	X	X	X				X	X	X	
$\vec{C}$	X			X	X		X	X		X
α		X		X		X	X		X	X
β			X		X	X		X	X	X

Donde: ☒ Datos
☐ Incóg.

(*.- Si se obtiene α y β es fácil averiguar μ y δ (ver $\uparrow$).

En realidad se tienen los módulos de A , B y C , ya que si se tuvieran los vectores, en estos ya está implícitos los ángulos. Ver: VECTOR)

Se usan los siguientes símbolos:

α .- Medir el ángulo α .

α .- Trazar el ángulo α .

A .- Módulo del $\vec{A}$.

A .- Trazar con igual medida que A y paralelo a $\vec{A}$.

$\parallel$.- Unir con regla, línea llena (vector).

$\cdots$.- Unir con regla, línea punteada (o auxiliar).

$\cap$.- Trazar con compás de abertura igual a A (Cerca del pto. de apoyo).

(,).- Arco hecho con A .

$\times$.- Corte de dos arcos.

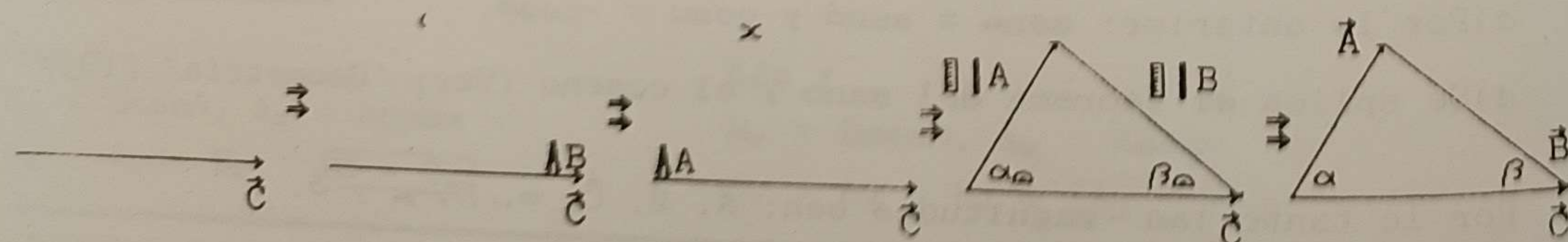
1) Datos: A , B y C .

Incógnitas: α y β .

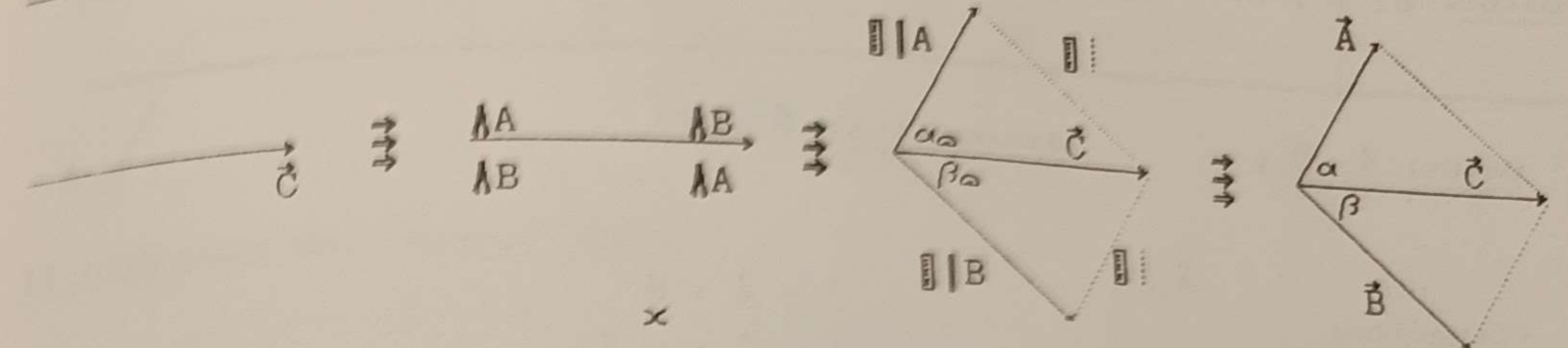
Situación: $\vec{C}$ $\vec{A}$ $\vec{B}$

RESOLUCION:

I) Método del Polígono



II) Método del Paralelogramo



III) Método Analítico

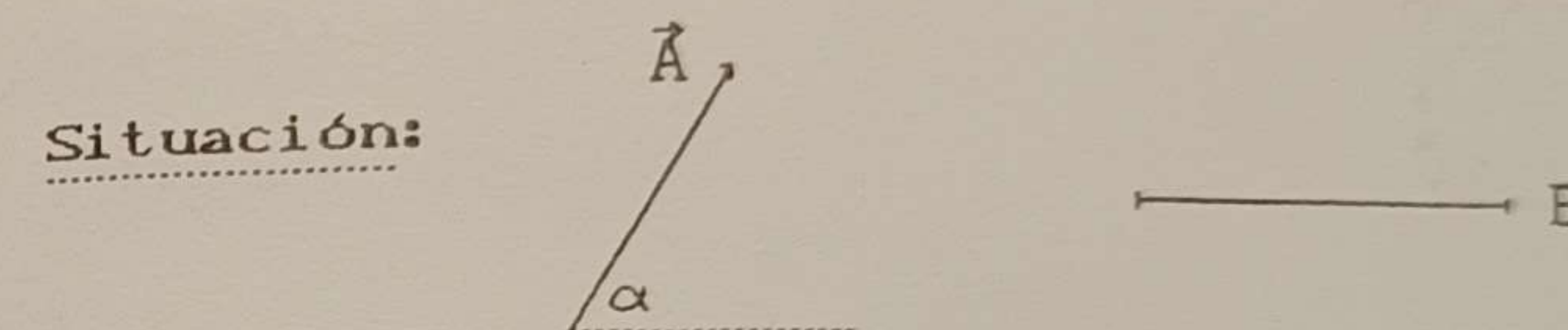
$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \mu \Rightarrow \cos \mu = \frac{C^2 - (A^2 + B^2)}{2AB}$$

$$\frac{\sin \mu}{C} = \frac{\sin \beta}{A} \Rightarrow \beta = \arcsen\left(\frac{A \cdot \sin \mu}{C}\right)$$

$$\frac{\sin \mu}{C} = \frac{\sin \alpha}{B} \Rightarrow \alpha = \arcsen\left(\frac{B \cdot \sin \mu}{C}\right)$$

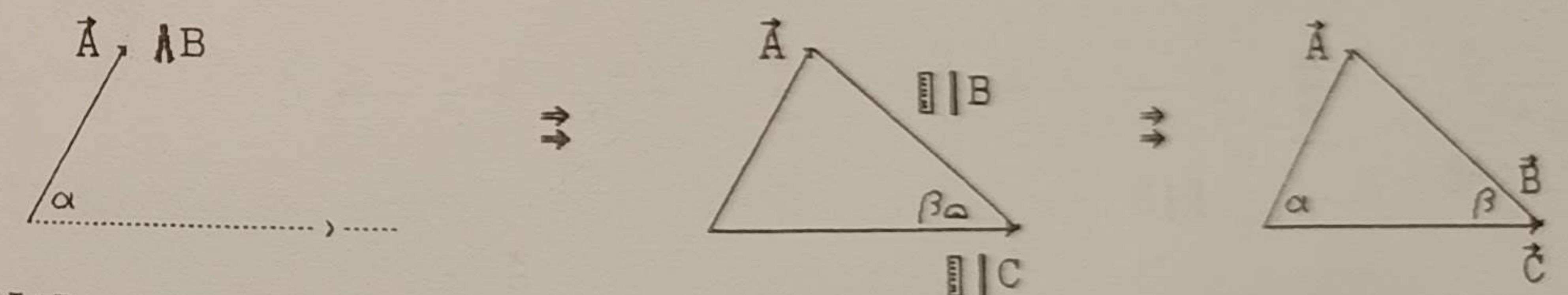
2) Datos: $\vec{A}$, B y α

Incógnitas: $\vec{C}$ y β .



RESOLUCION:

I) Método del Polígono



II) Descomposición

II.a) Método Analítico

Eje y:

$$B_y = B \cdot \sin \beta, A_y = A \cdot \sin \alpha, C_y = 0$$

$$C_y = A_y - B_y \Rightarrow A_y = B_y \Rightarrow$$

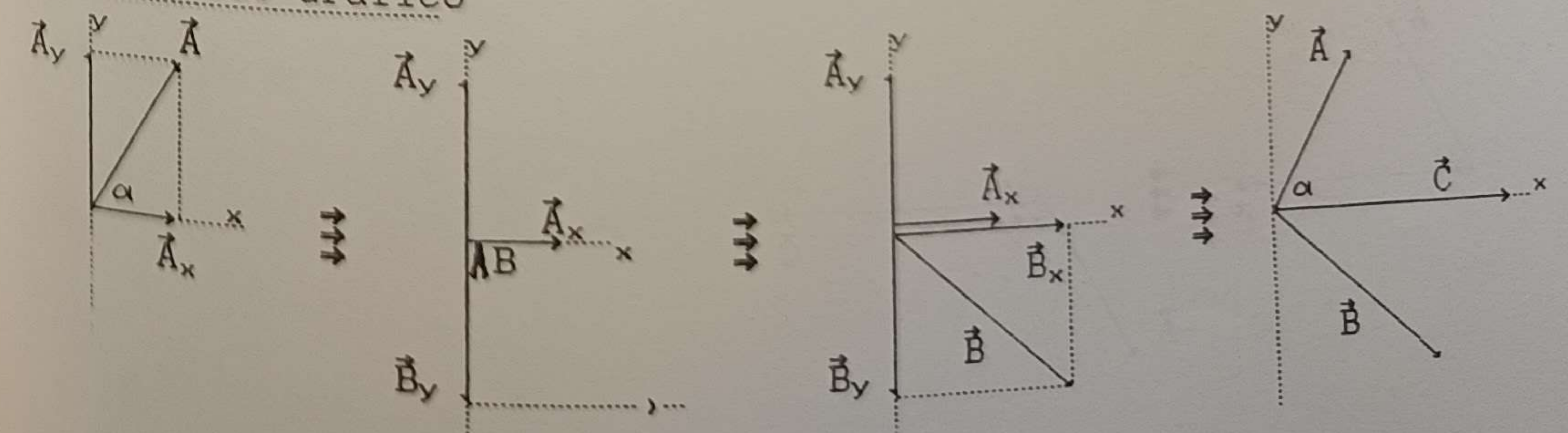
$$B \cdot \sin \beta = A \cdot \sin \alpha \Rightarrow \beta = \arcsen\left(\frac{A \cdot \sin \alpha}{B}\right)$$

Eje x:

$$B_x = B \cdot \cos \beta, A_x = A \cdot \cos \alpha, C = C_x$$

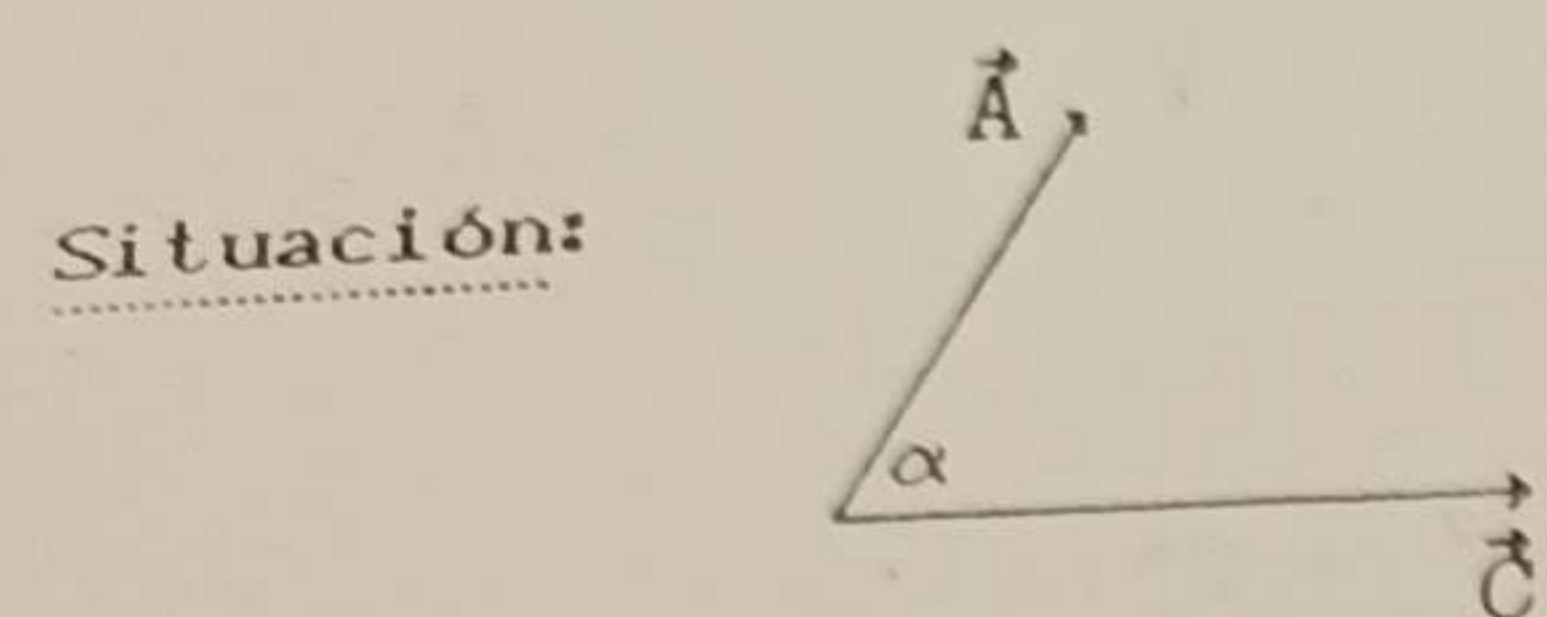
$$C_x = A_x + B_x \Rightarrow C = B \cos \beta + A \cos \alpha$$

II.b) Método Gráfico



3) Datos: A , B y β . Incógnitas: C y α . Similar a 2)

4) Datos: A , C y α . Incógnitas: B y β .



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

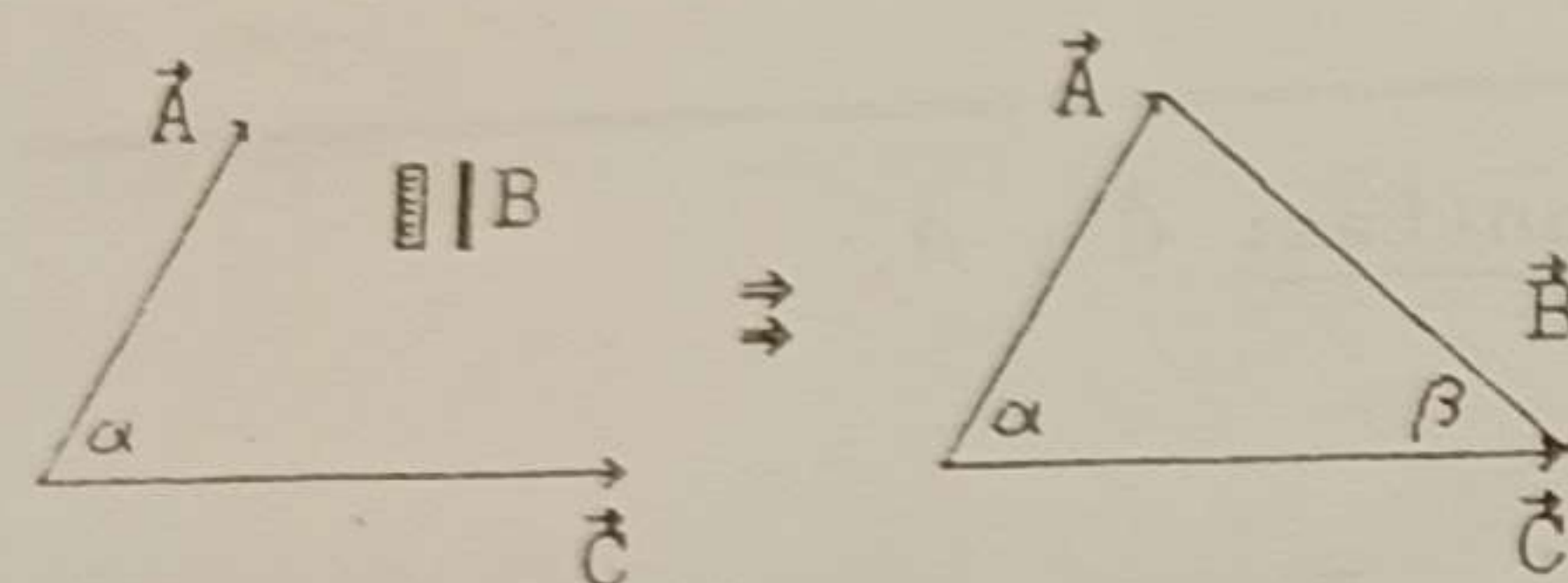
$$\vec{B} = \vec{C} + (-\vec{A})$$

(Ver: Resta de vectores)

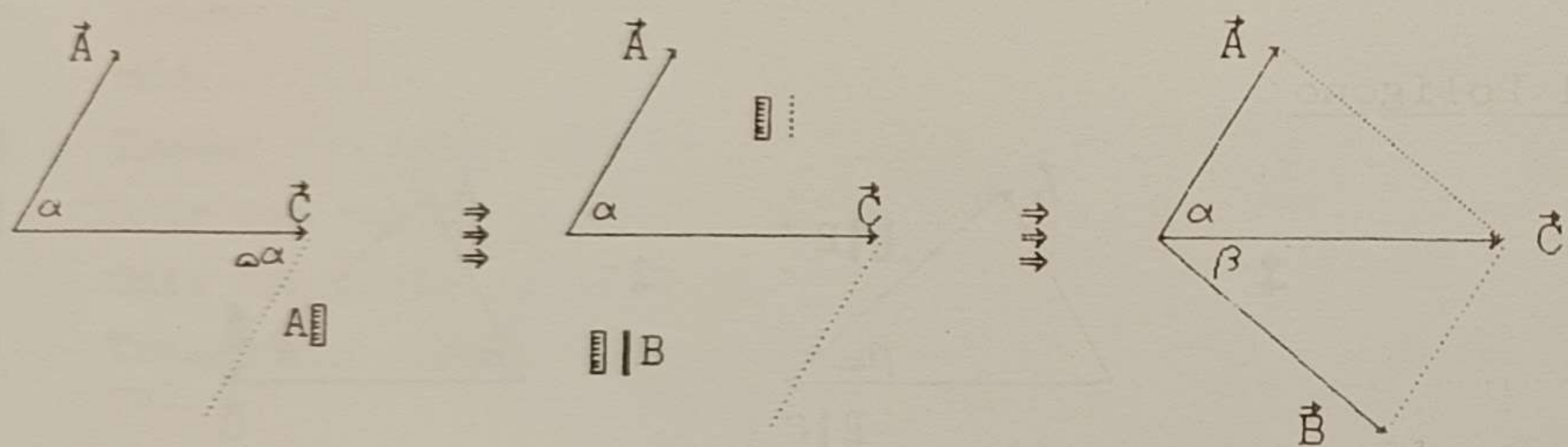
RESOLUCION:

I) $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

I.a) Método del polígono



I.b) Método del paralelogramo

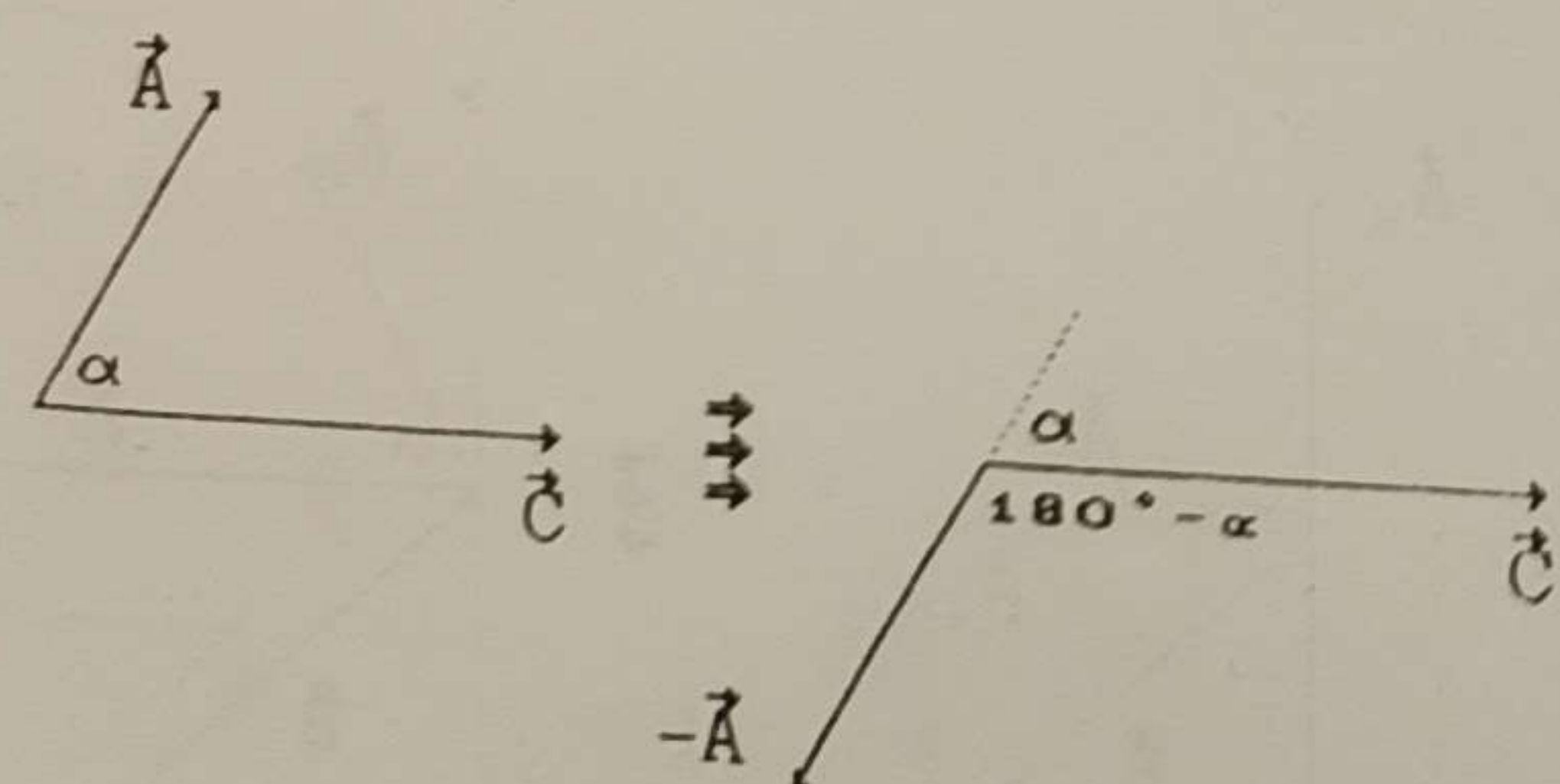


I.c) Método Analítico

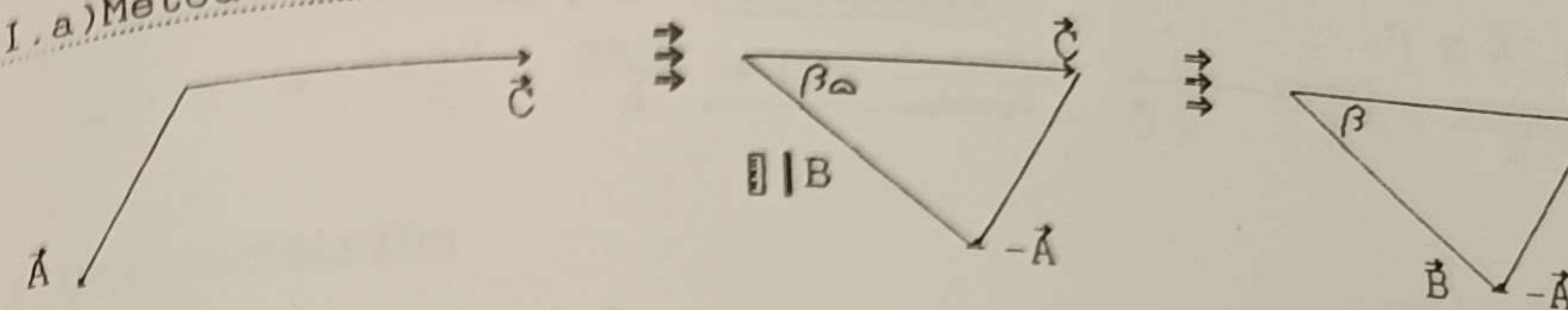
$$B^2 = A^2 + C^2 + 2.A.C.\cos\alpha$$

$$\frac{\sin\beta}{A} = \frac{\sin\alpha}{B} \Rightarrow \beta = \arcsen\left(\frac{A.\sin\alpha}{B}\right)$$

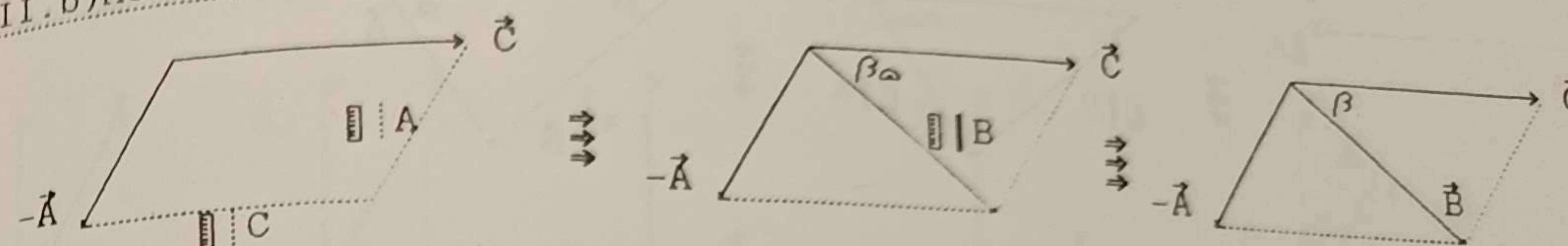
II) $\vec{B} = \vec{C} + (-\vec{A})$



II.a) Método del polígono



II.b) Método del paralelogramo



II.c) Método Analítico

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$(\cos(180^\circ - \alpha) < 0)$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

} Idem I.c)

III. Descomposición

III.a) Método Analítico

Eje x

$$A_x = A.\cos\alpha, C = C_x$$

$$C_x = A_x + B_x \Rightarrow$$

$$C = B_x + A.\cos\alpha$$

$$B_x = C - A.\cos\alpha$$

Eje y

$$A_y = A.\sin\alpha, C_y = 0$$

$$C_y = A_y - B_y$$

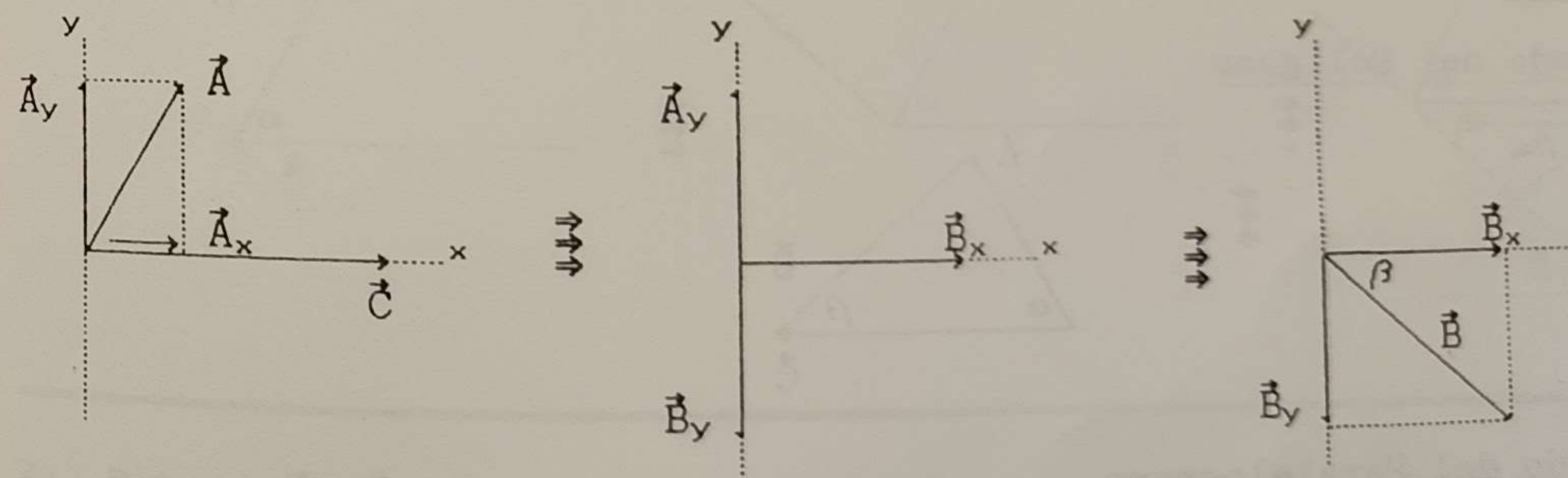
$$A_y = B_y$$

$$B_y = A.\sin\alpha$$

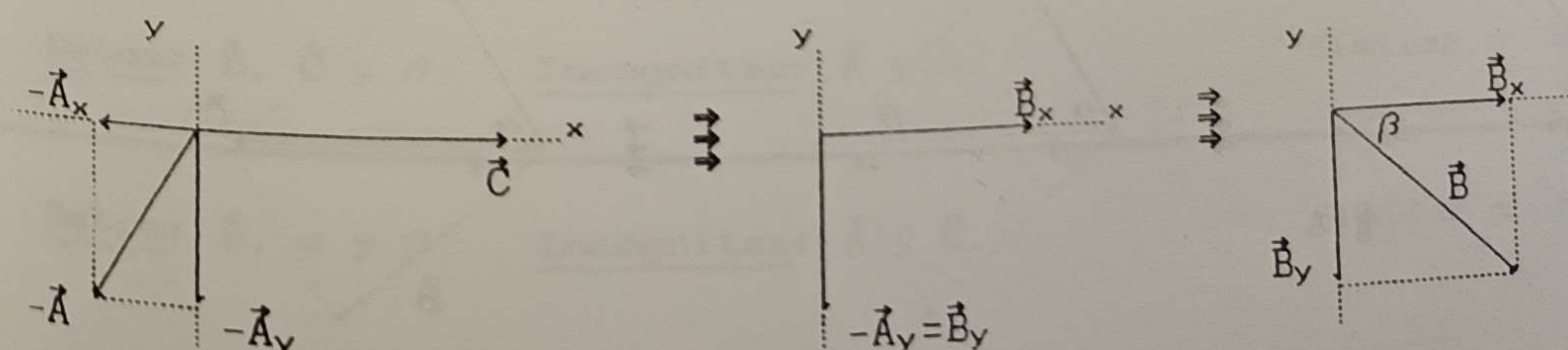
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

$$\tan\beta = \frac{B_y}{B_x}$$

III.b) Método Gráfico: $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

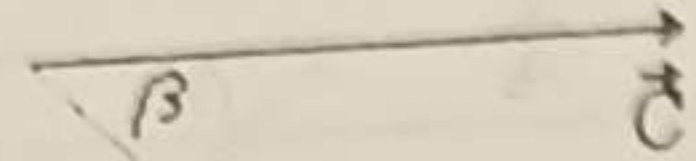


III.c) Método Gráfico: $\vec{B} = \vec{C} + (-\vec{A})$



5. Datos: A , C y β .

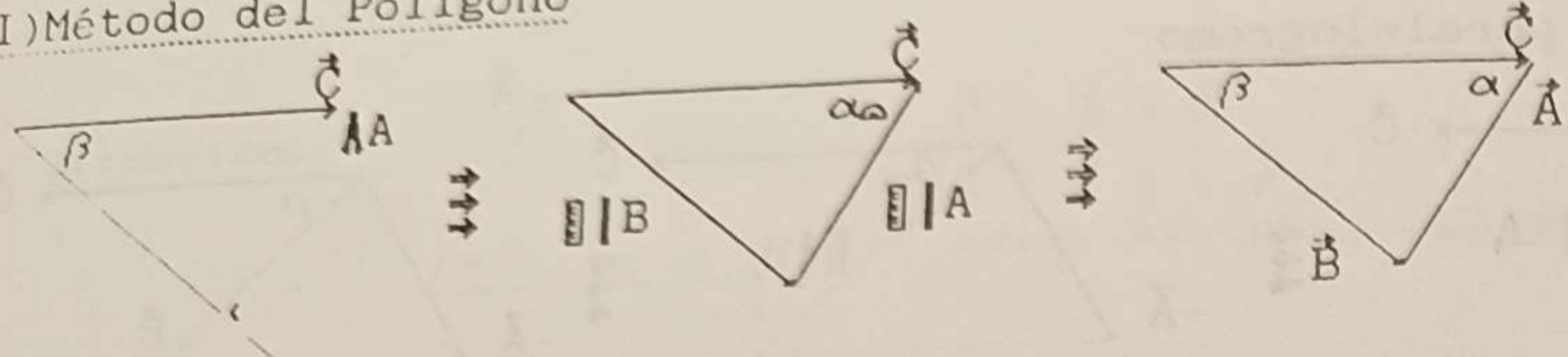
Situación:



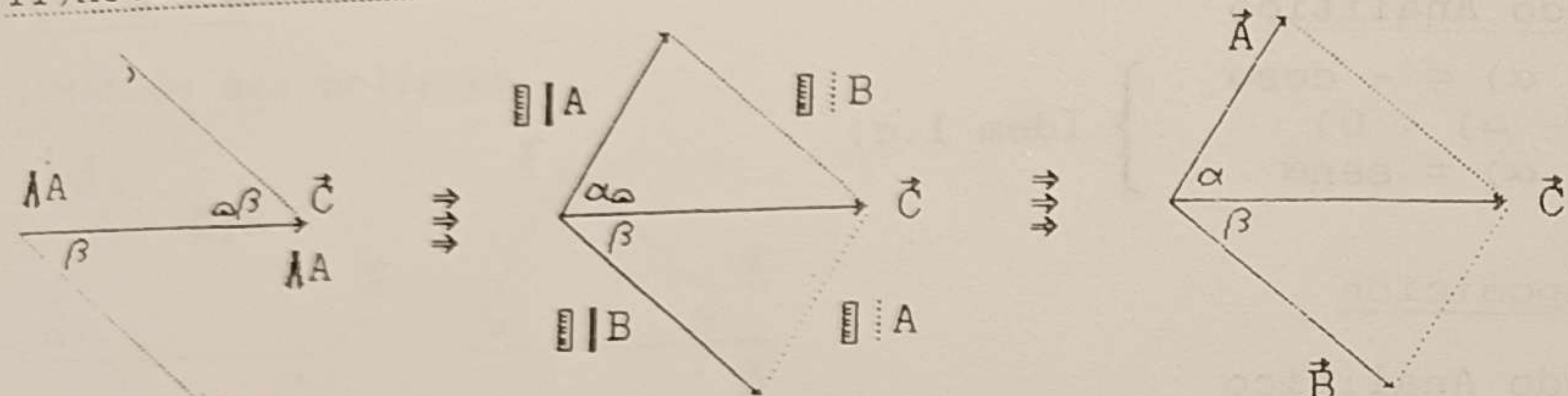
Incógnitas: B y α .

RESOLUCION:

I) Método del Polígono



II) Método del Paralelogramo



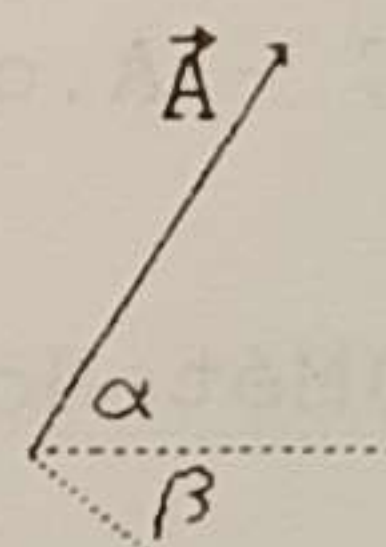
III) Método Analítico

$$B = C \cdot \cos \beta - \sqrt{A^2 - C^2 \sin^2 \beta} \quad \parallel \quad \frac{\sin \beta}{A} = \frac{\sin \alpha}{B} \Rightarrow \alpha = \arcsen\left(\frac{B \cdot \sin \beta}{A}\right)$$

6. Datos: A , α y β .

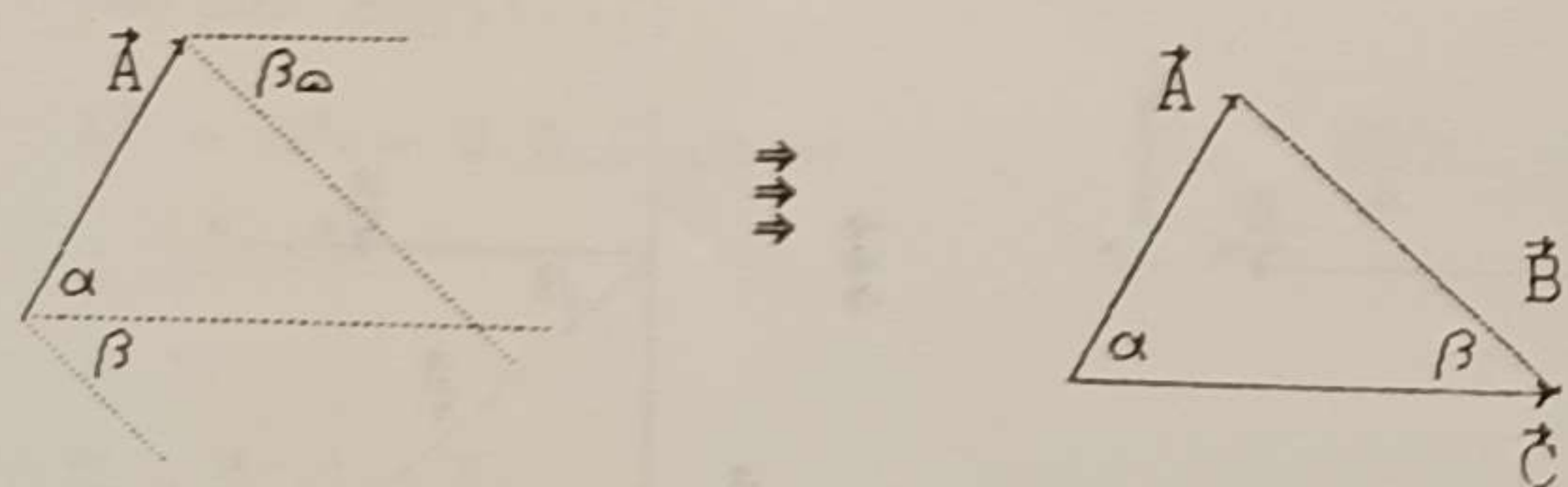
Incógnitas: B y C .

Situación:

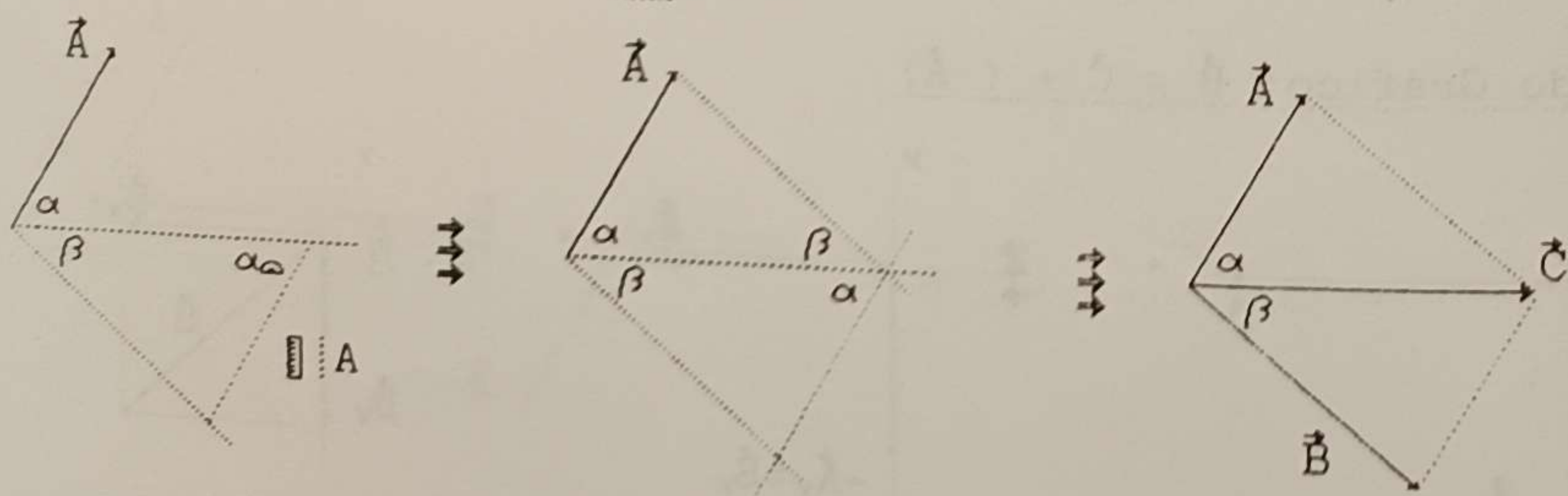


RESOLUCION:

I.a) Método del Polígono



I.b) Método del Paralelogramo

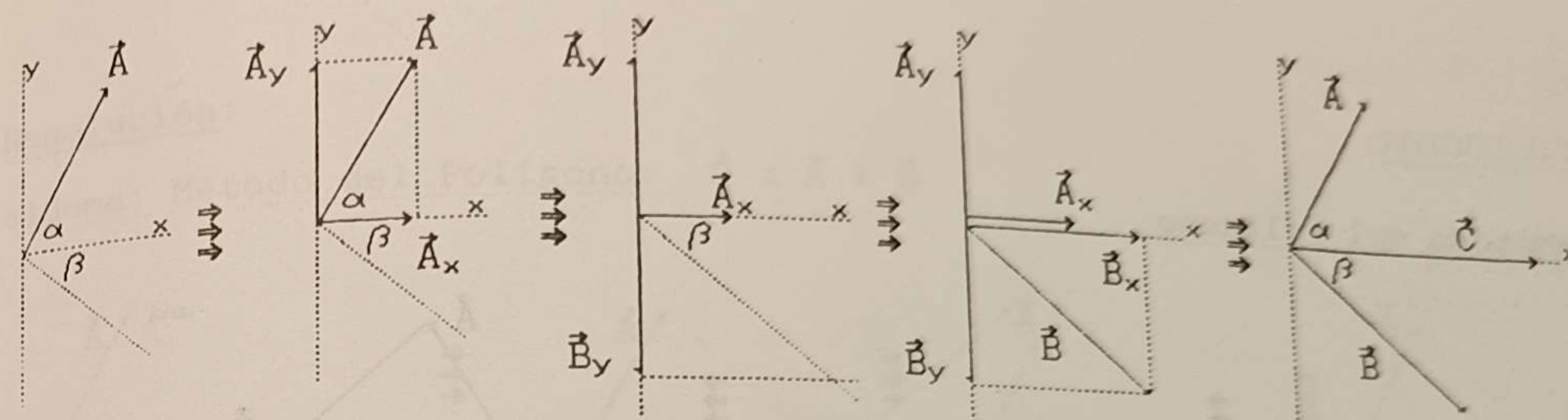


I.c) Método Analítico

$$\mu = \alpha + \beta \Rightarrow \frac{\sin \beta}{A} = \frac{\sin \mu}{C} \Rightarrow C = \frac{A \cdot \sin \mu}{\sin \beta} \quad \parallel \quad \frac{\sin \beta}{A} = \frac{\sin \alpha}{B} \Rightarrow B = \frac{A \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$$

II. Descomposición

Método Gráfico

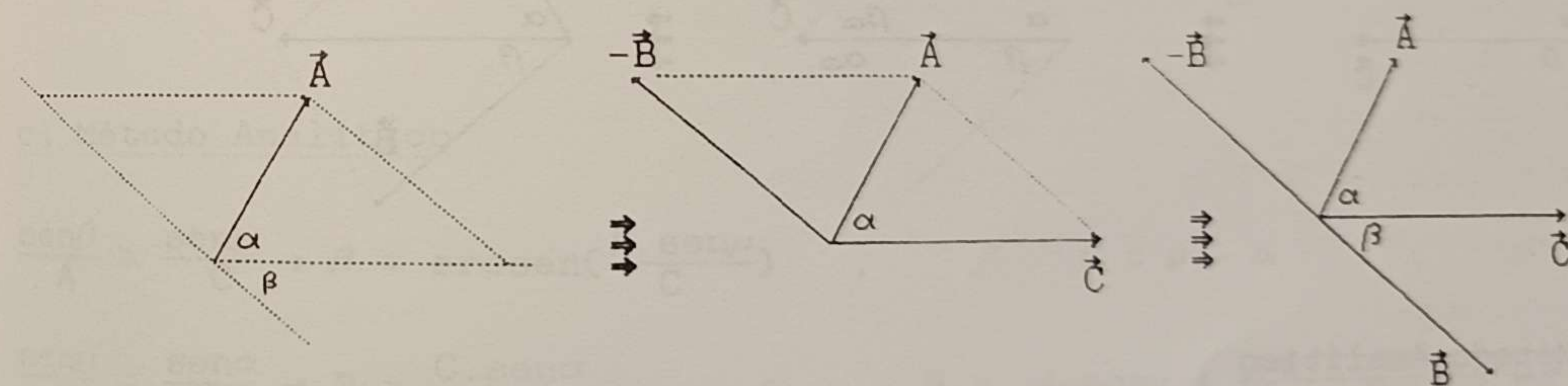


III. Resta, descomposición

Si descomponemos A por las líneas punteadas, las componentes son C y $-B$, siendo $-B$ el vector opuesto a B .

$$C = A + B \Rightarrow A = C - B \Rightarrow A = C + (-B)$$

(Ver: Resta y situación 4)



7. Datos: B , C y α . Incógnitas: A y β .

Similar a 4)

8. Datos: B , C y β . Incógnitas: A y α .

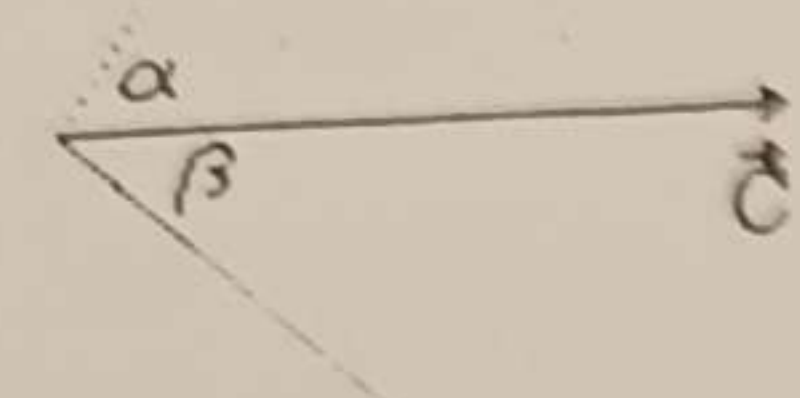
Similar a 5)

9. Datos: B , α y β . Incógnitas: A y C .

Similar a 6)

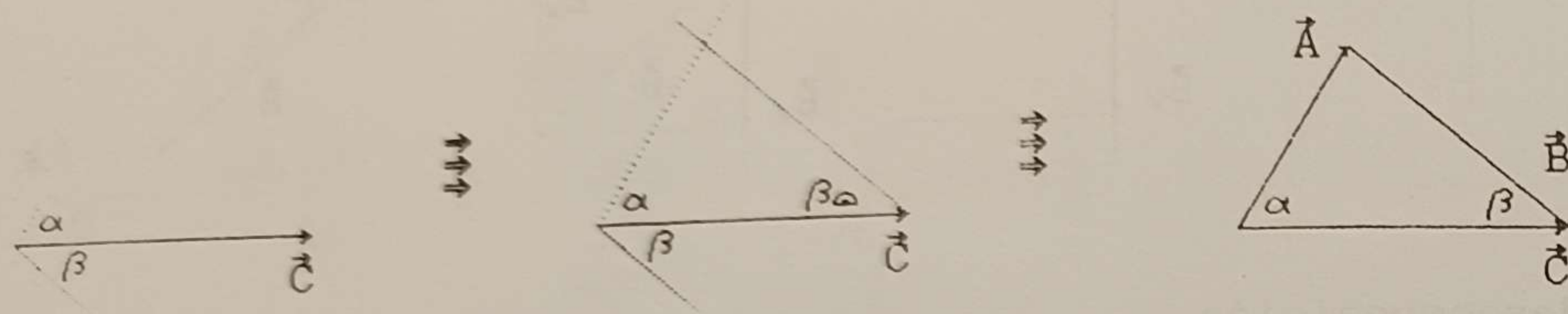
10. Datos: $\vec{C}$, α y β . Incógnitas: $\vec{B}$ y $\vec{A}$.

Situación:

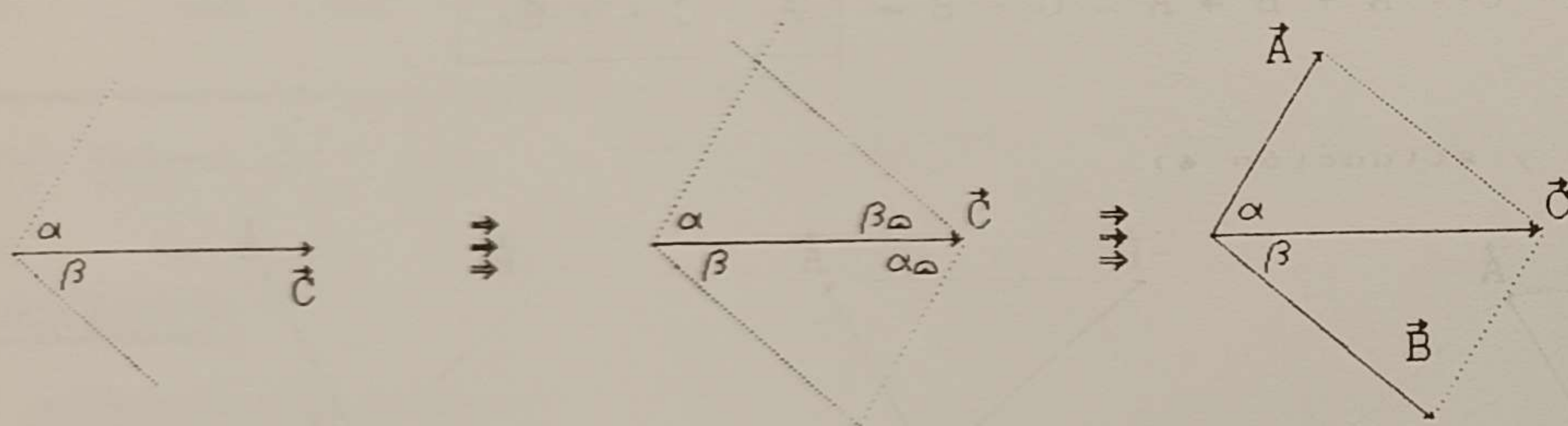


RESOLUCION:

a) Método del Polígono



b) Método del Paralelogramo



c) Método Analítico

$$\mu = \alpha + \beta \rightarrow \frac{\text{sen}\beta}{A} = \frac{\text{sen}\mu}{C} \rightarrow A = \frac{C \cdot \text{sen}\beta}{\text{sen}\mu}$$

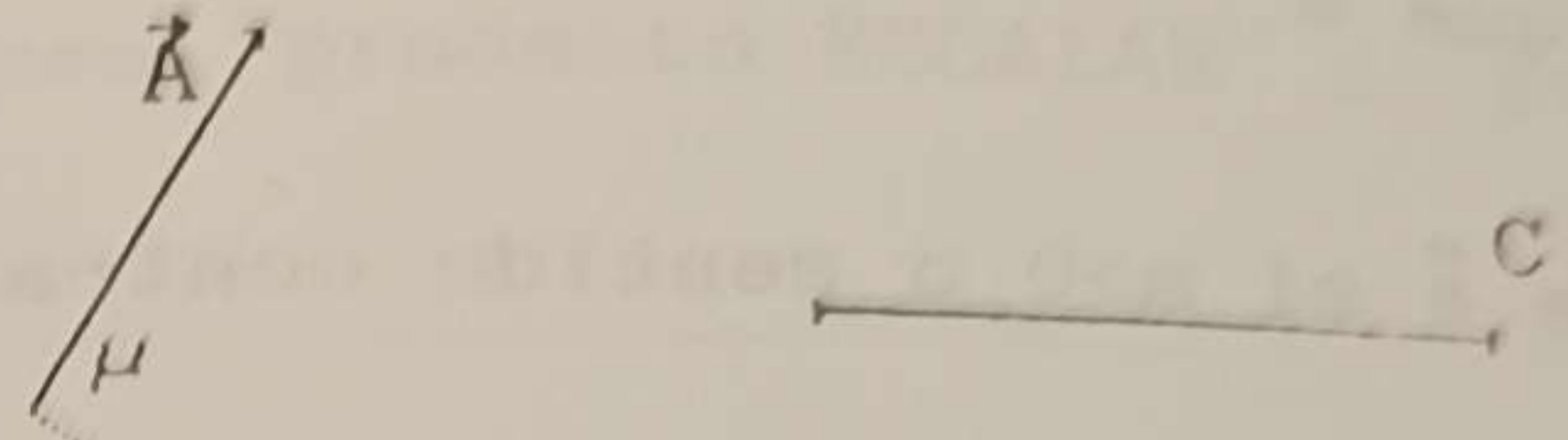
$$\frac{\text{sen}\mu}{C} = \frac{\text{sen}\alpha}{B} \rightarrow B = \frac{C \cdot \text{sen}\alpha}{\text{sen}\mu}$$

Si agregamos μ como dato, o incógnita, sólo se plantea una nueva situación:

11. Datos: $\vec{A}$, C y μ .

Incógnitas: α , β y $\vec{B}$.

Situación:

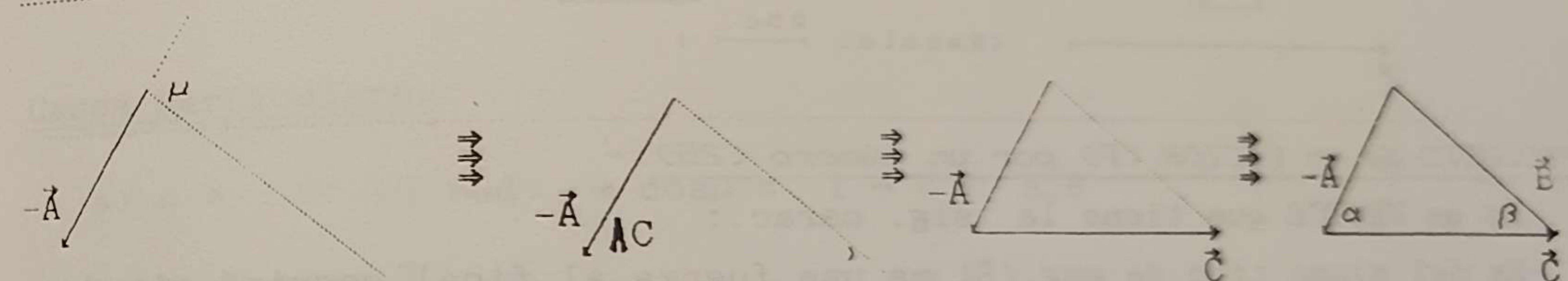


Resolución:

a) Suma: Método del Polígono: $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$



b) Resta: Método del Polígono: $\vec{B} = \vec{C} + (-\vec{A})$



c) Método Analítico

$$\frac{\text{sen}\beta}{A} = \frac{\text{sen}\mu}{C} \rightarrow \beta = \arcsen\left(\frac{A \cdot \text{sen}\mu}{C}\right), \quad \beta = \mu - \alpha$$

$$\frac{\text{sen}\mu}{C} = \frac{\text{sen}\alpha}{B} \rightarrow B = \frac{C \cdot \text{sen}\alpha}{\text{sen}\mu} \quad \text{o} \quad B = -A \cdot \cos\mu + \sqrt{C^2 - A^2 \cdot \text{sen}^2\mu}$$

PRODUCTO de un VECTOR ($\vec{a}$) por un ESCALAR (m).

Es un VECTOR que tiene la siguientes características:

- 1.-Es una NUEVA magnitud (Por ej. si m es masa y a es aceleración, el producto es una fuerza).
- 2.-Su dirección es la misma que $\vec{a}$.
- 3.-Su módulo es $|m| \times a$.
- 4.-Su sentido es el mismo que $\vec{a}$ si $m > 0$ o sentido contrario si $m < 0$.

Ejemplos: I) $m = 4,0 \text{ Kg}$

$a = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ 

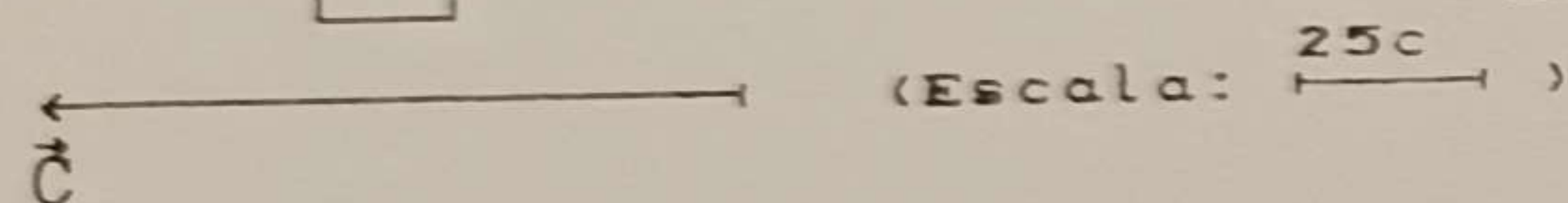
si $\vec{F} = m \times \vec{a} \Rightarrow \boxed{F} = m \times a = 4,0 \text{ Kg} \times 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \boxed{40 \text{ N}}$



II) $N = -5$

$Z = 20 \text{ z}$ 

si $\vec{C} = N \times \vec{Z} \Rightarrow \boxed{C} = N \times Z = -5 \times 20 \text{ z} = \boxed{-100 \text{ c}}$



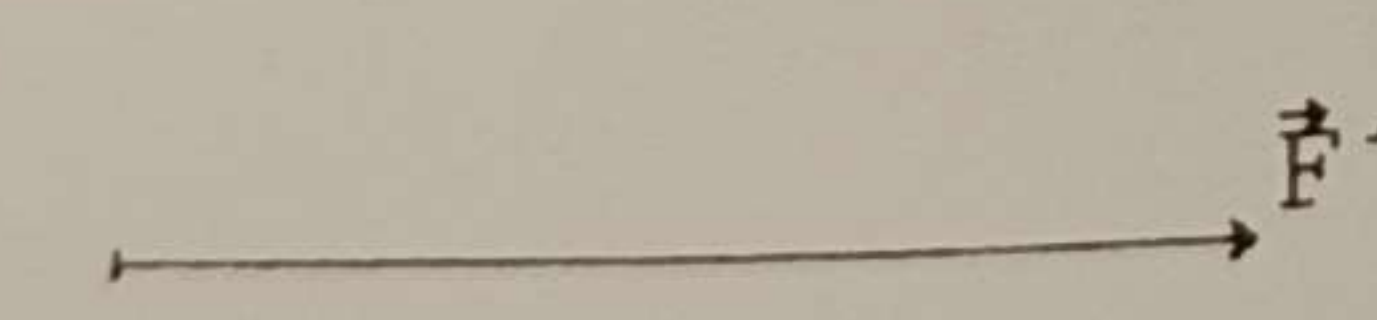
PRODUCTO de un VECTOR (F) por un número (N°).

Es un VECTOR que tiene la sig. carac.:

- 1.-Es del mismo tipo de mag. (Si es una fuerza al final seguirá siendo una fuerza).
- 2.-Su dirección es la misma que $\vec{F}$.
- 3.-Su módulo es $|N^\circ| \times F$. (Por ej.: $25F$)
- 4.-Su sentido es el mismo que $\vec{F}$ si $N^\circ > 0$ o, contrario si $N^\circ < 0$.

Ejemplos: I) $N^\circ = 4$

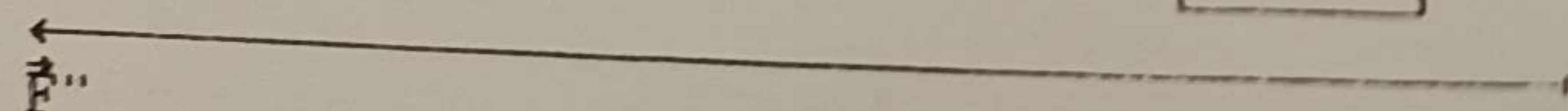
$F = 10 \text{ N}$ 

si $\vec{F}' = N^\circ \times \vec{F} \Rightarrow \boxed{F'} = N^\circ \times F = 4 \times 10 \text{ N} = \boxed{40 \text{ N}}$ 

II) $N^\circ = -5$

$F = 20 \text{ N}$ 

si $\vec{F}'' = N^\circ \times \vec{F} \Rightarrow \boxed{F''} = N^\circ \times F = -5 \times 20 \text{ N} = \boxed{-100 \text{ N}}$



¿Por qué en este caso para el mismo ej. se usa la misma escala y en el caso anterior no?

Producto entre VECTORES.

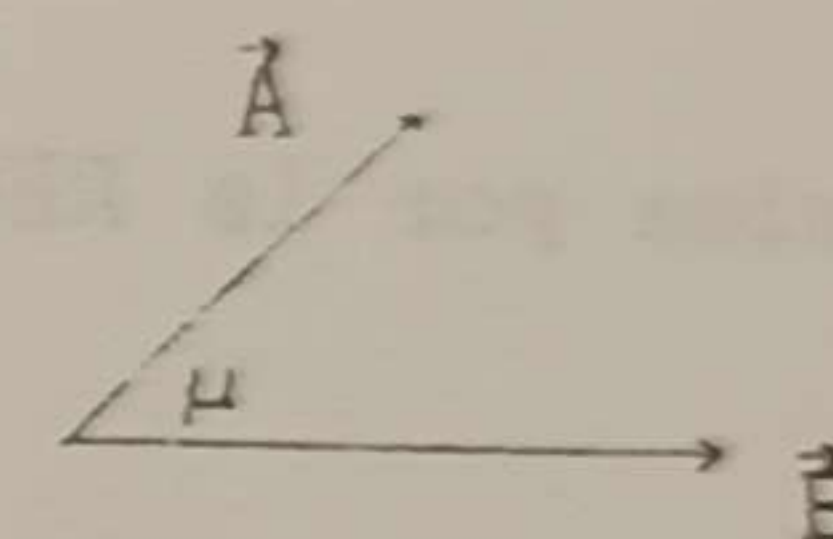
A diferencia del producto de escalares que es único (ver), el producto entre vectores pueden ser de dos tipos según la magnitud que resulte, llamandose "producto ESCALAR" o "producto VECTORIAL".

Producto ESCALAR.

El producto escalar de dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$, que forman un áng. μ (ver fig., μ :áng. menor), se define como el producto de los módulos (en valor absoluto) por el coseno del ángulo que forman.

Se escribe $\Rightarrow \boxed{E = \vec{A} \cdot \vec{B}}$

Se calcula $\Rightarrow E = A \cdot B \cdot \cos \mu$



Casos Particulares:

a) $\mu = 0^\circ$ (0 rad) $\Rightarrow \cos \mu = 1 \Rightarrow E = A \cdot B$

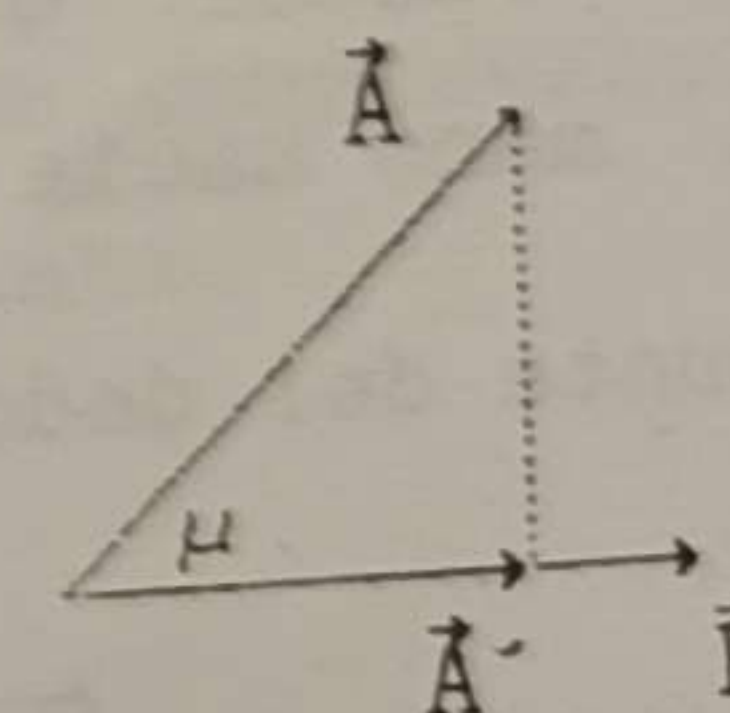
b) $\mu = 90^\circ$ ($\frac{\pi}{2} \text{ rad}$) $\Rightarrow \cos \mu = 0 \Rightarrow E = 0$

c) $\mu = 180^\circ$ ($\pi \text{ rad}$) $\Rightarrow \cos \mu = -1 \Rightarrow E = -A \cdot B$

Observe que:

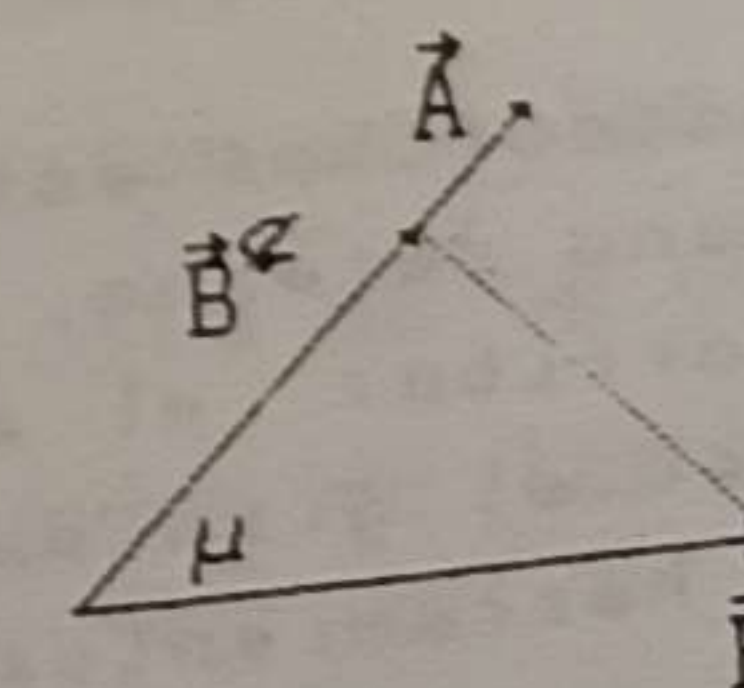
I) $\vec{A}'$ es la componente de $\vec{A}$ que coincide con la dirección de $\vec{B}$.

$A' = A \cdot \cos \mu \Rightarrow \boxed{E = A' \cdot B}$



II) $\vec{B}'$ es la componente de $\vec{B}$ que coincide con la dirección de $\vec{A}$.

$B' = B \cdot \cos \mu \Rightarrow \boxed{E = B' \cdot A}$



Producto VECTORIAL.

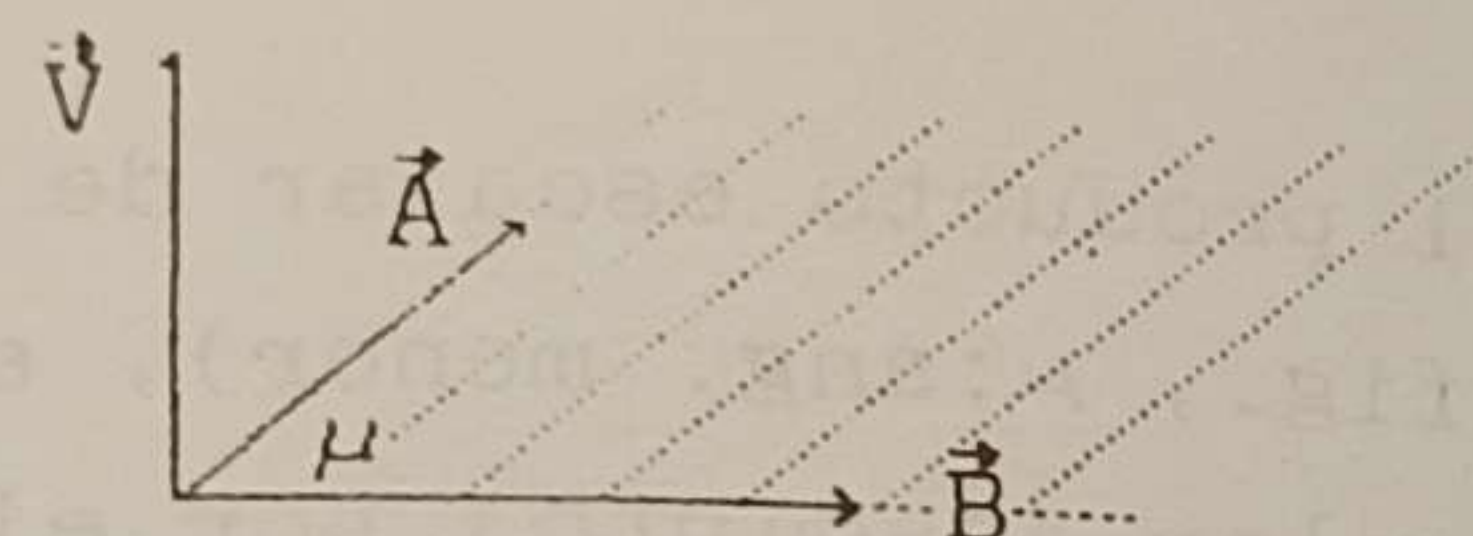
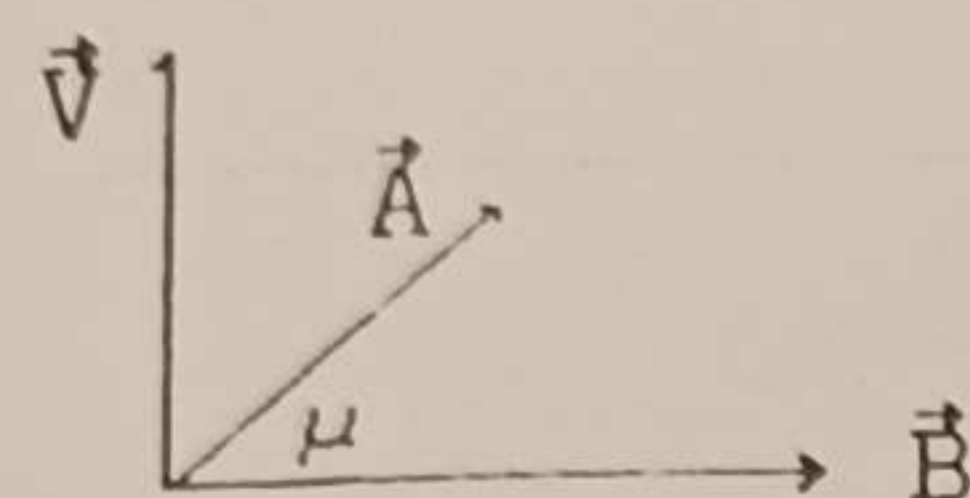
El producto vectorial de dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$, que forman un áng. μ (ver fig.), se define como el producto de los módulos (en valor absoluto) por el seno del ángulo que forman.

Se escribe $\Rightarrow \vec{V} = \vec{A} \wedge \vec{B}$

Módulo: $V = A \cdot B \cdot \text{sen} \mu$

Dirección:

Perpendicular al plano formado entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



$\vec{V} \perp \text{Plano} (\vec{A}, \vec{B})$.

Sentido: Se determina por la REGLA de la mano DERECHA.

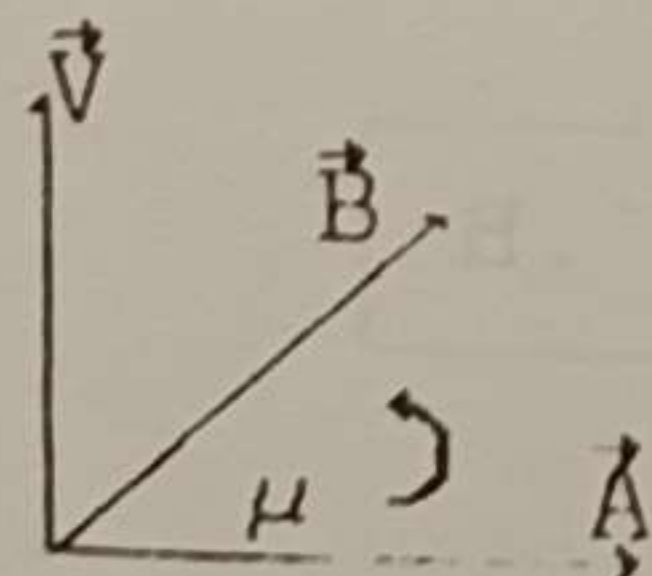
Casos Particulares:

- Si: a) $\mu = 0^\circ \Rightarrow \text{sen} \mu = 0 \Rightarrow V = 0$
 b) $\mu = 90^\circ \Rightarrow \text{sen} \mu = 1 \Rightarrow V = A \cdot B$
 c) $\mu = 180^\circ \Rightarrow \text{sen} \mu = 0 \Rightarrow V = 0$

Regla de la mano derecha

*Previo: Determine la dirección de $\vec{V}$.

- 1) Ponga la mano derecha como muestra la figura.
- 2) Con la mano de esta forma, ponga el borde del dedo meñique sobre el vector que está en primer término en la ecuación ($\vec{A}$) y mueva la mano hacia el otro ($\vec{B}$).
- 3) La punta del dedo pulgar indica el sentido de $\vec{V}$.



El sacacorchos está construido en base a la regla de la mano derecha, si se hace un giro horario (visto desde arriba) el sacacorchos se hunde (fig. 1), en cambio si el giro es antihorario, éste sube (fig. 2). Otras herramientas y objetos se basan en esta regla como las tapas de enroscar, los tornillos, las canillas etc. (Compruébelo)

fig. 1

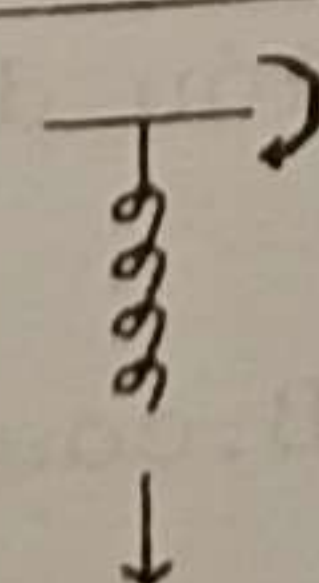
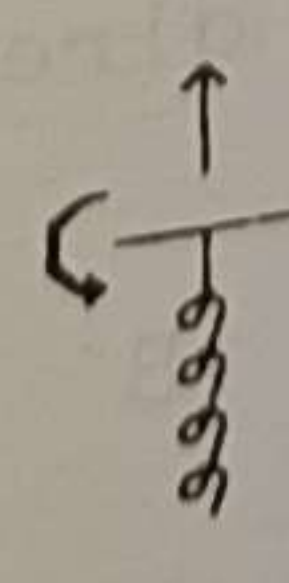


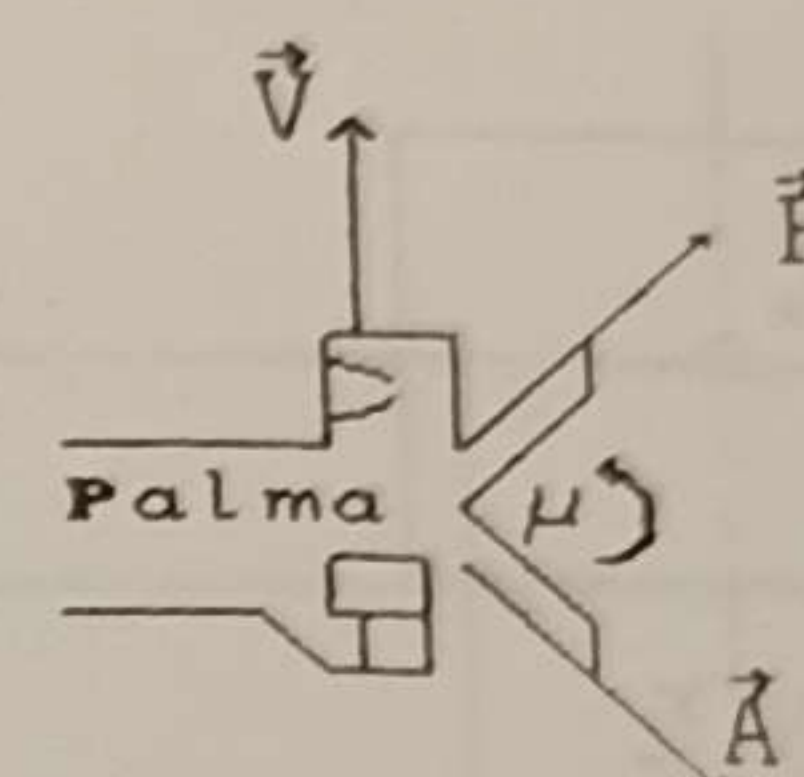
fig. 2



Regla de la mano izquierda.

Es otra regla posible para determinar el sentido de $\vec{V}$.

- 1) Ponga la mano como muestra la fig. y NO la modifique.
- 2) El dedo mayor debe coincidir con el 1er. término ($\vec{A}$) y el índice con el 2do. ($\vec{B}$).
- 3) El dedo pulgar indica el sentido de $\vec{V}$.



Problemas:

- 1) Demuestre que si: $\vec{V} = \vec{A} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{B} \wedge \vec{A} = -\vec{V}$
- 2) ¿Qué dirección tiene $\vec{V}$, si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están sobre el plano del:
 - a) pizarrón y, b) escritorio?
- 3) Se desea realizar el producto vectorial entre $\vec{F}$ y $\vec{r}$.
 - a) ¿Qué ángulo se debe considerar?
 - b) ¿Qué sentido tiene el vector resultante? Fundamente.

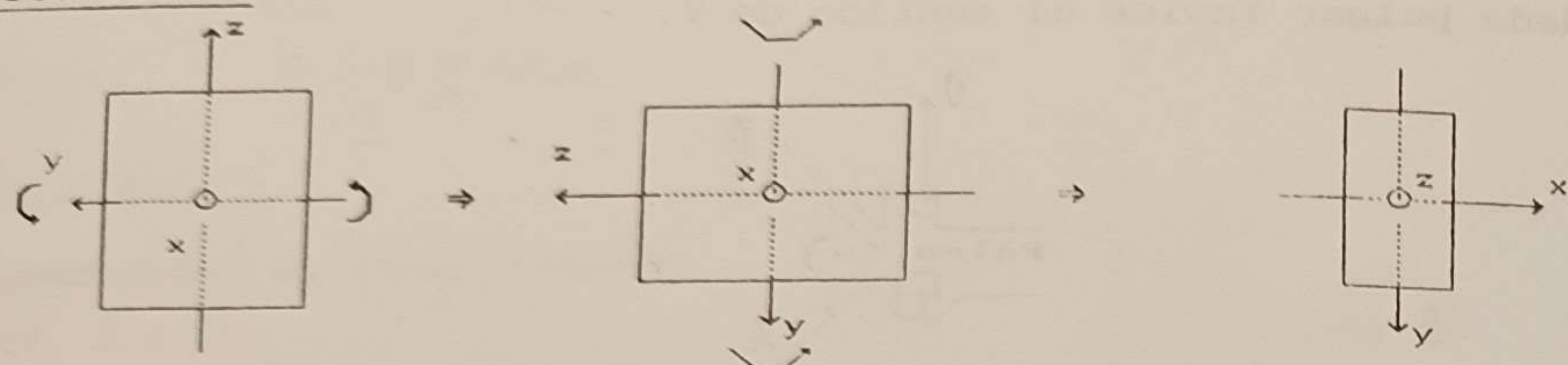
SEUDOVECTORES.

NO todas las magnitudes que tienen módulo, dirección y sentido son magnitudes vectoriales ya que no cumplen con las propiedades de la suma. Por ejemplo en la rotación finita de un cuerpo rígido (ej. Libro, ver figura) donde se cambie el orden de las rotaciones el resultado es diferente (Hágalo Ud. mismo).

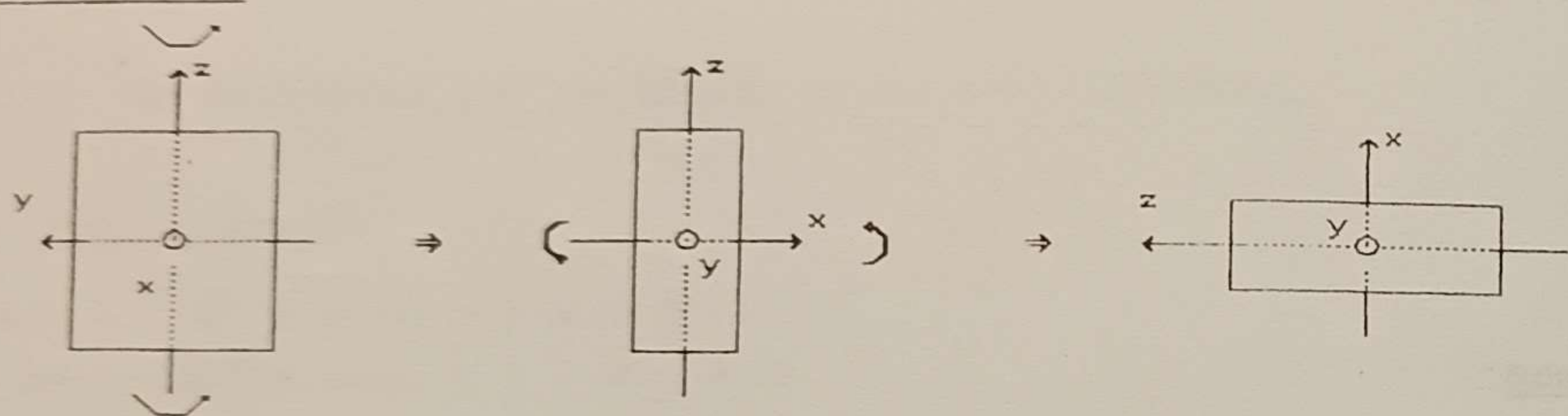
En la figura se han indicado los tres ejes octogonales con su respectivo sentido. Se van hacer dos giros en diferente orden y se verá que el resultado final no es igual (El libro no queda de la misma forma) (*)

Aclaraciones: O.-Saliente (ver: "sentido").
Las figuras muestran la situación inicial y las consecuencias de los giros.

Situación I:



Situación II:



Si en cambio se trabaja con valores pequeños ("infinitamente" pequeños) se los puede considerar como vectores.

Si a su vez todos los pseudovectores tienen la misma dirección se los puede considera como escalares (ver "Magnitudes vectoriales con igual dirección").

En 5to. año las magnitudes pseudovectores son las rotacionales (como por ej.: Momento cinético, velocidad angular, etc.), que se analizan con respecto a un eje fijo de giro, coincidiendo este con la dirección de los pseudovectores. Por lo tanto, se puede trabajar a estos como escalares (aunque no lo sean).

(*) - Observe que es el primer caso que Ud. analiza que sucede esto, es decir, que no se cumple la propiedad conmutativa, esa que dice: "el orden de los sumandos no altera el resultado"

19. Ecuaciones y gráficas de curvas

1.- RECTA.

Ecuación:

Forma tipo:

$$y = a \cdot x + b$$

Gráficas:

	$b = 0$	$b > 0$	$b < 0$
$a = 0$			
$a > 0$			
$a < 0$			

Pendiente:

$$a = \frac{y_f - y_i}{x_f - x_i}$$

$a = f(x)$		
$a = 0$	$a > 0$	$a < 0$

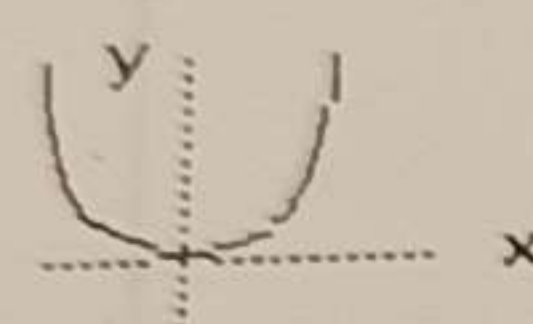
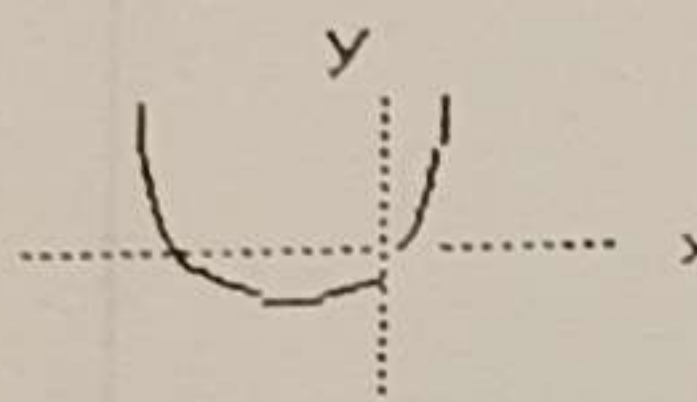
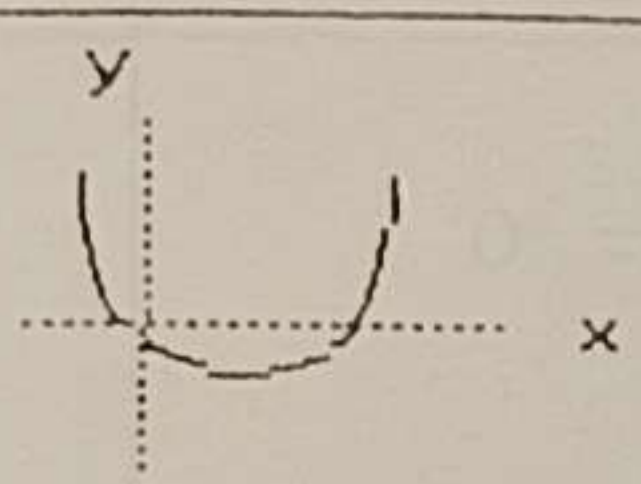
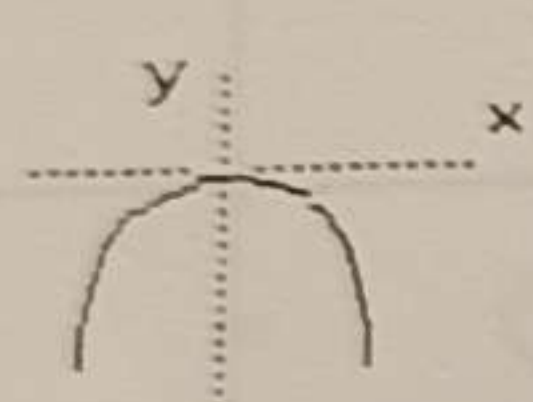
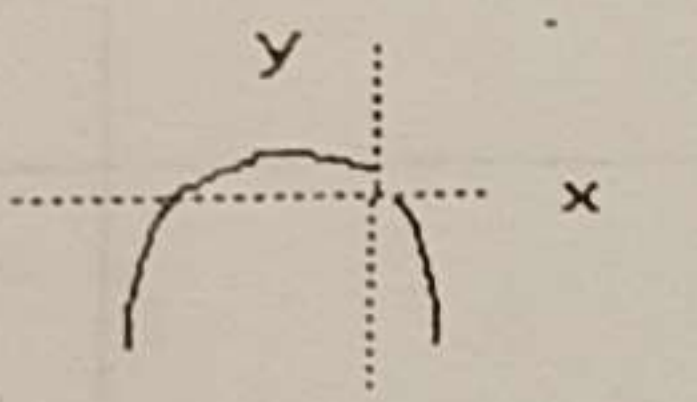
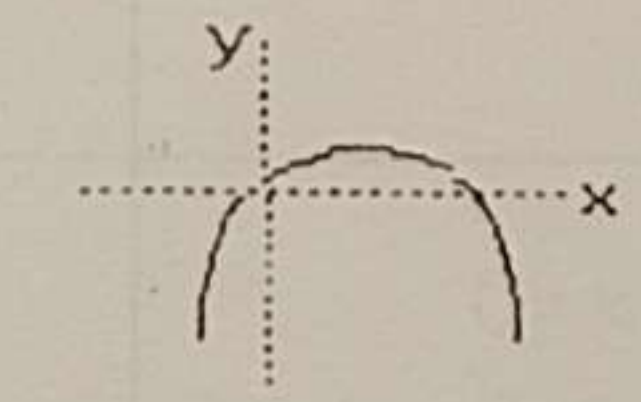
2. - Parábola.

Ecuación

Forma tipo: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Gráficas:

Para $c = 0$:

	$b = 0$	$b > 0$	$b < 0$
$a = 0$	$y = b \cdot x \Rightarrow$ Recta (ver arriba)		
$a > 0$			
$a < 0$			

Pendiente: $\text{pend.} = \frac{dy}{dx} = 2 \cdot a \cdot x + b$

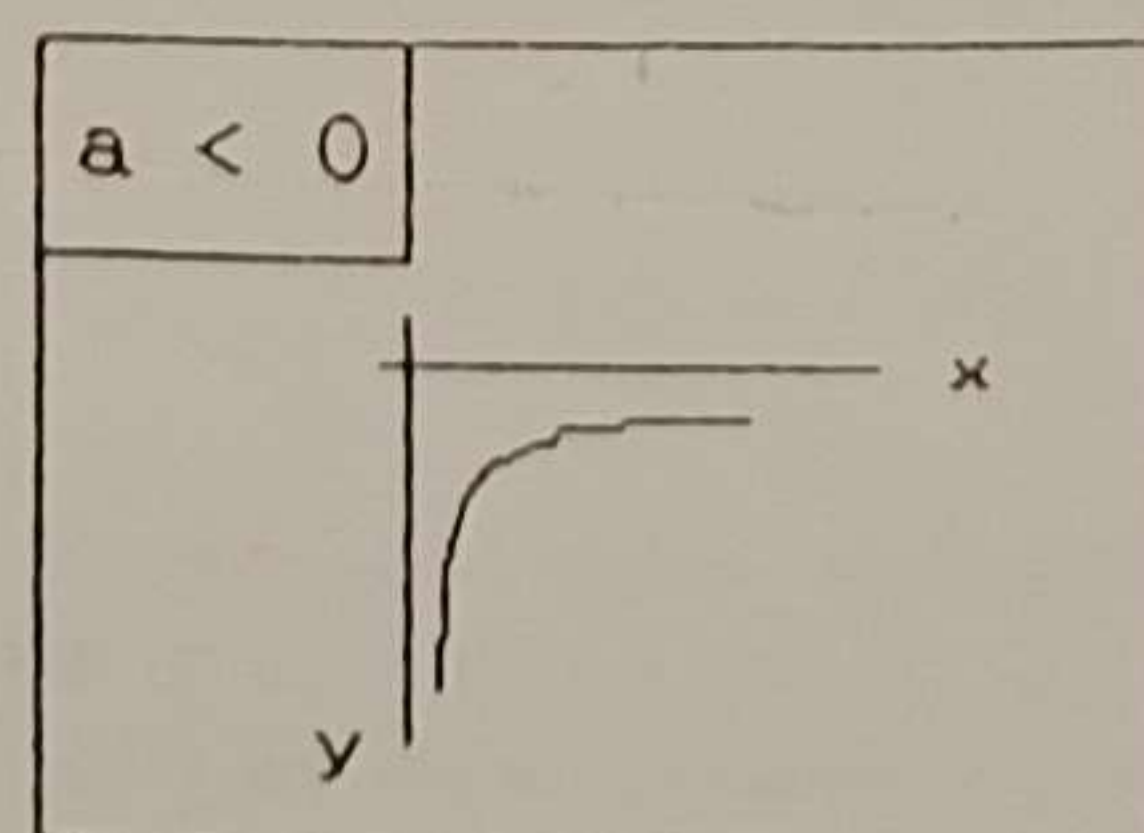
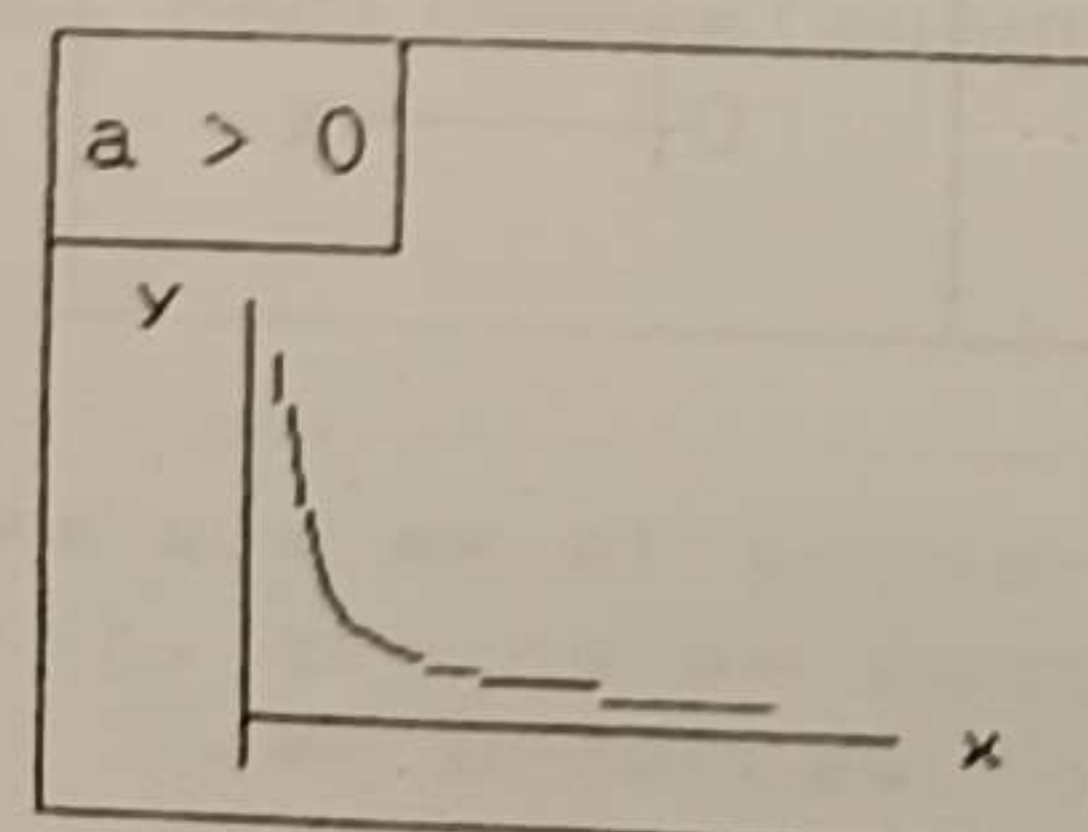
Ecuación de la recta.
Ver los dif. casos particulares.

3. - Hipérbola Equilatera (con $x > 0$)

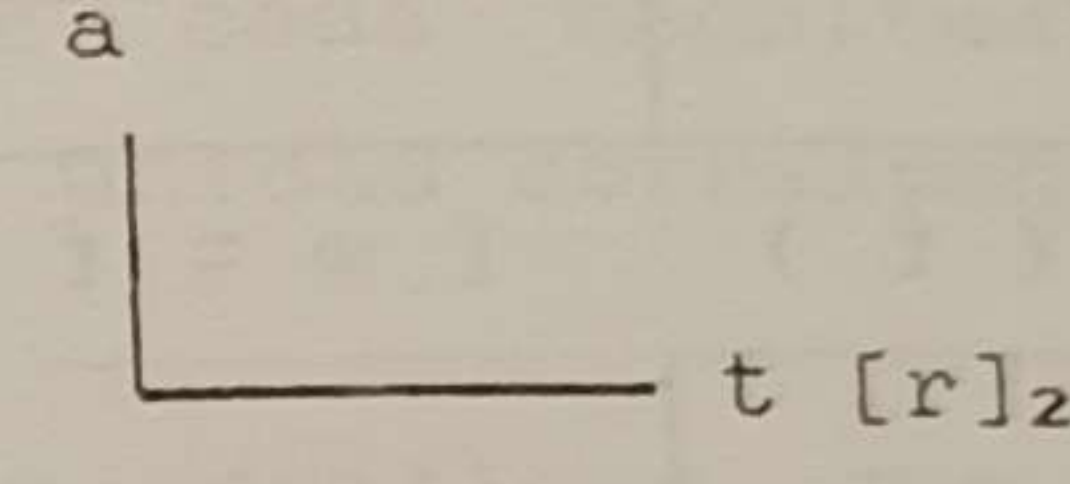
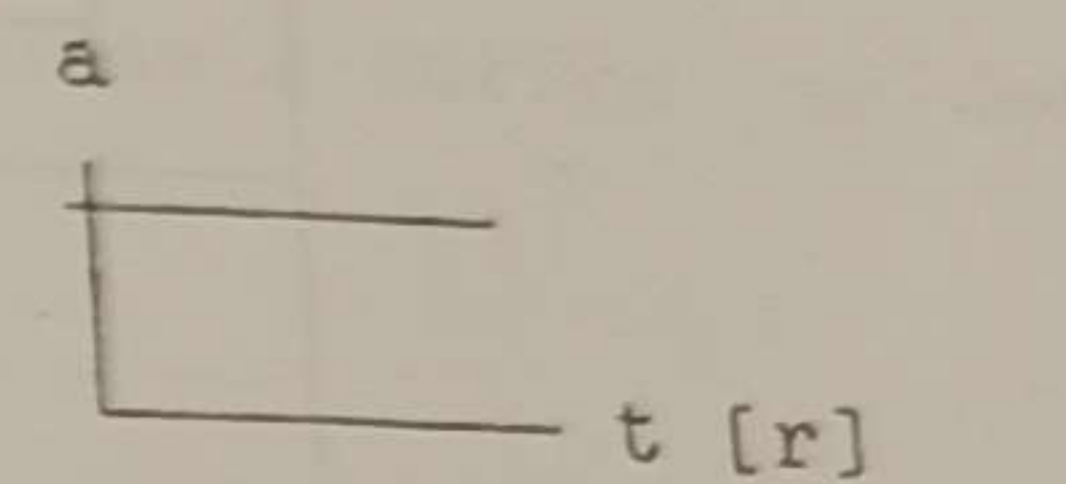
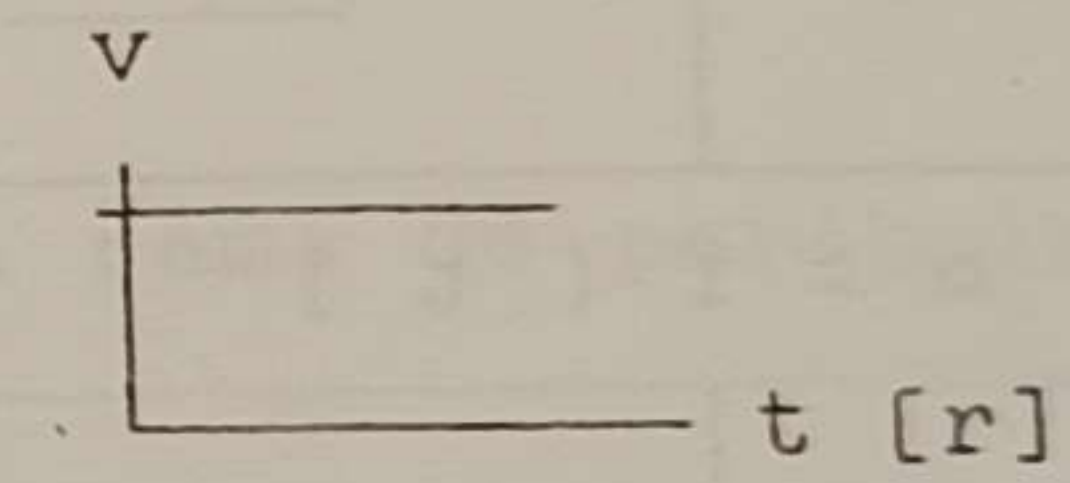
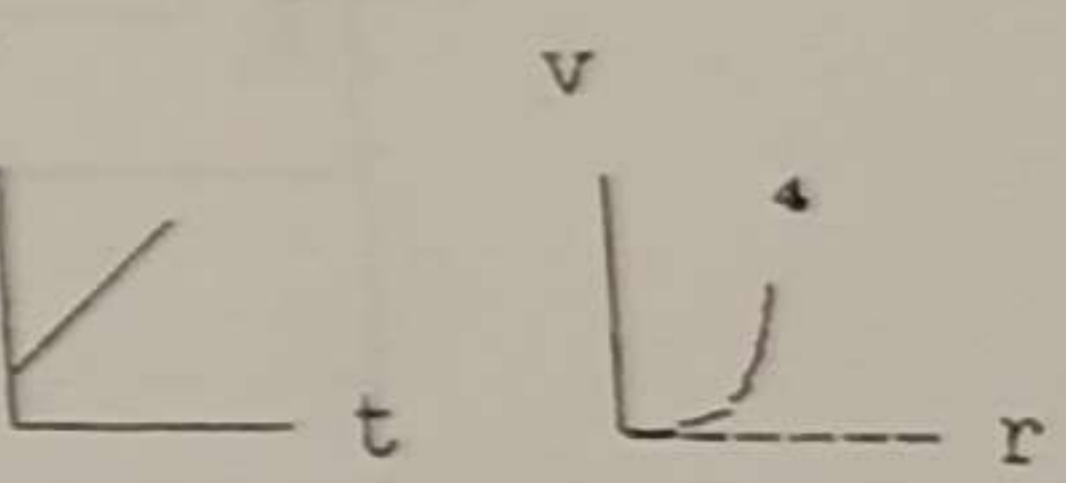
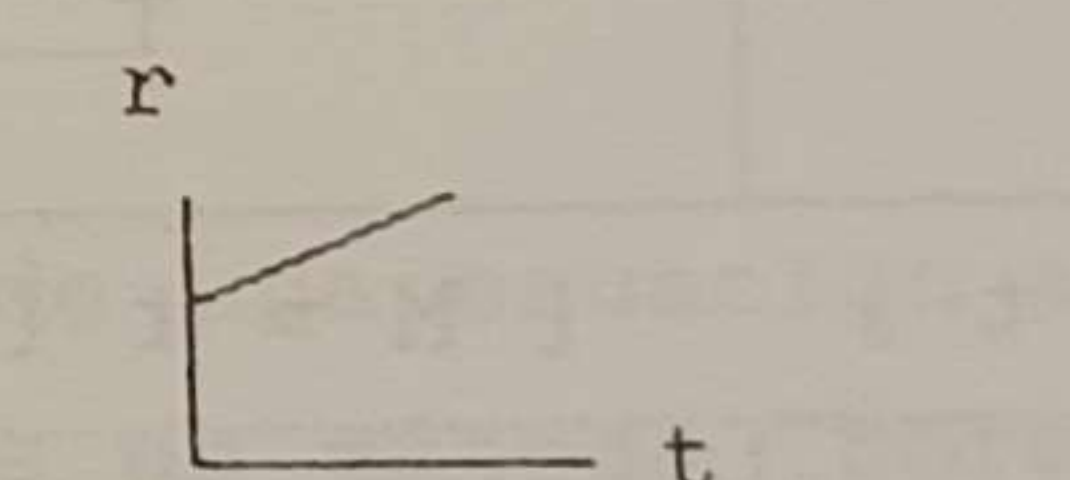
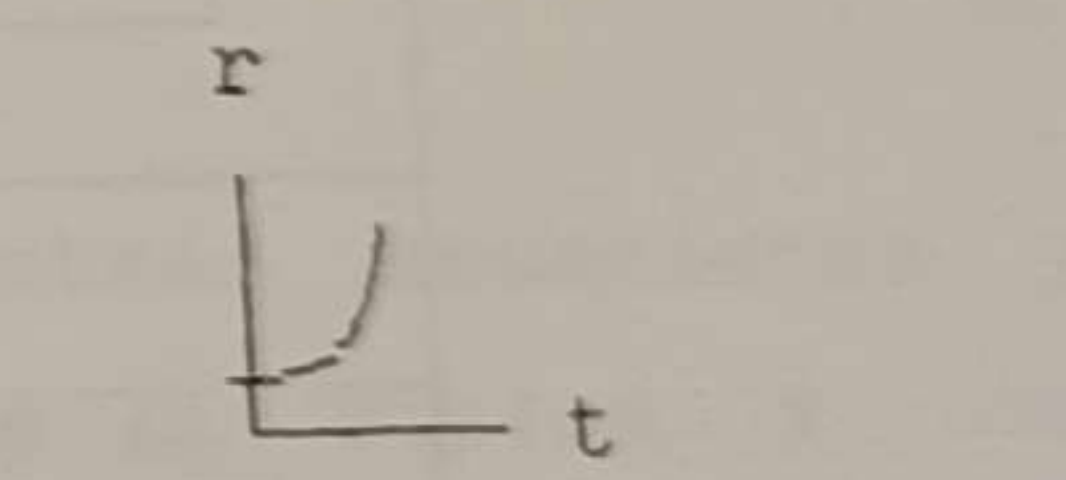
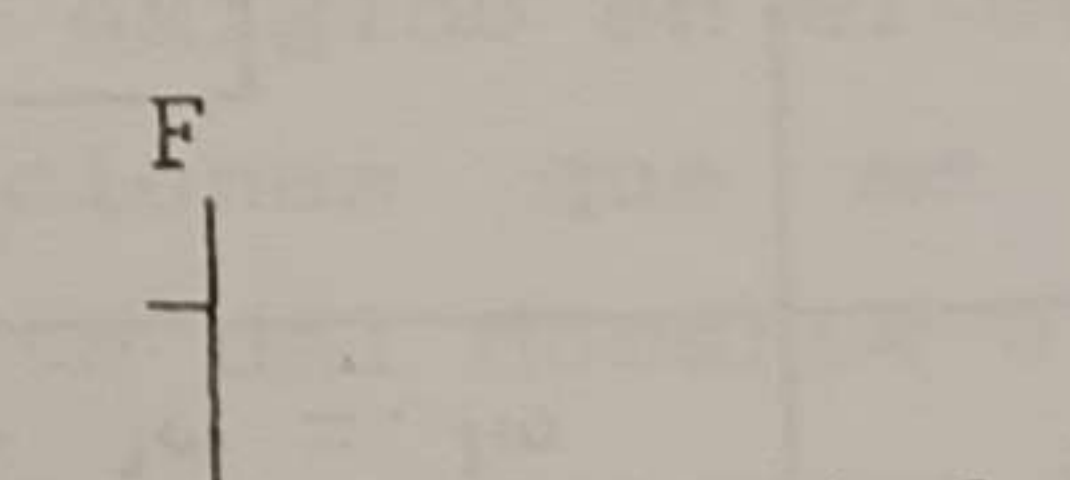
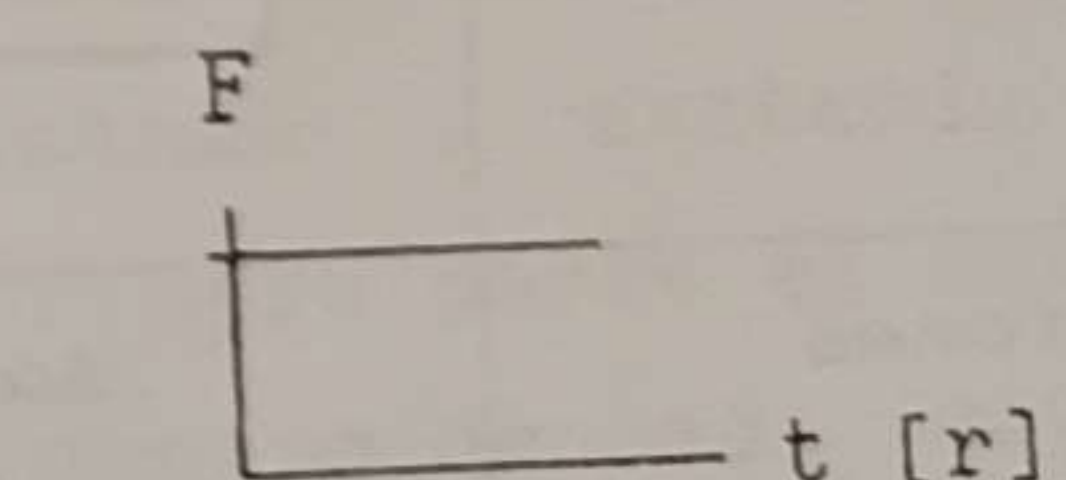
Ecuación

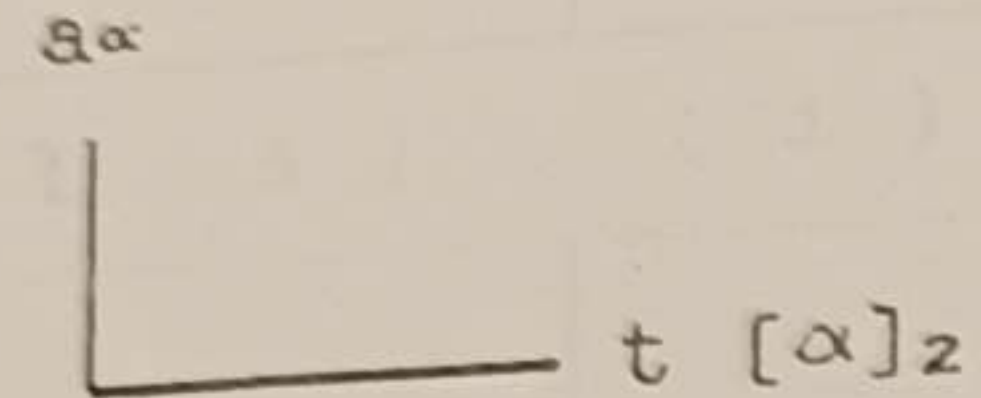
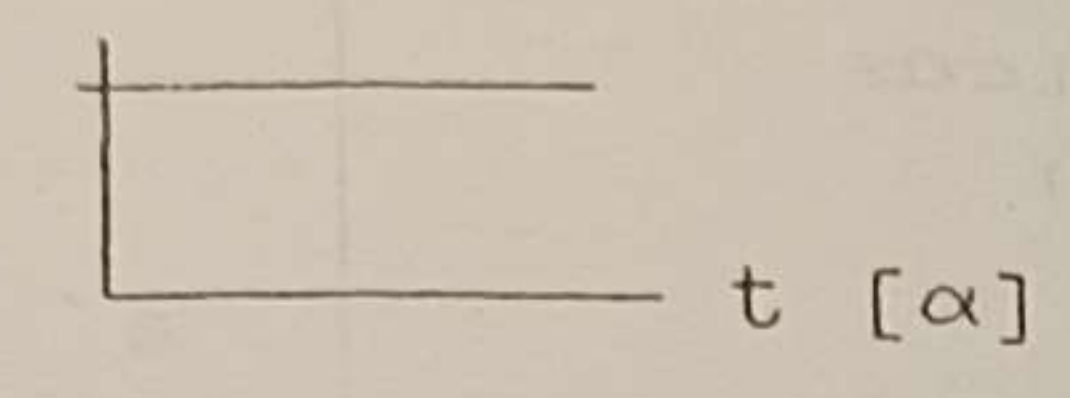
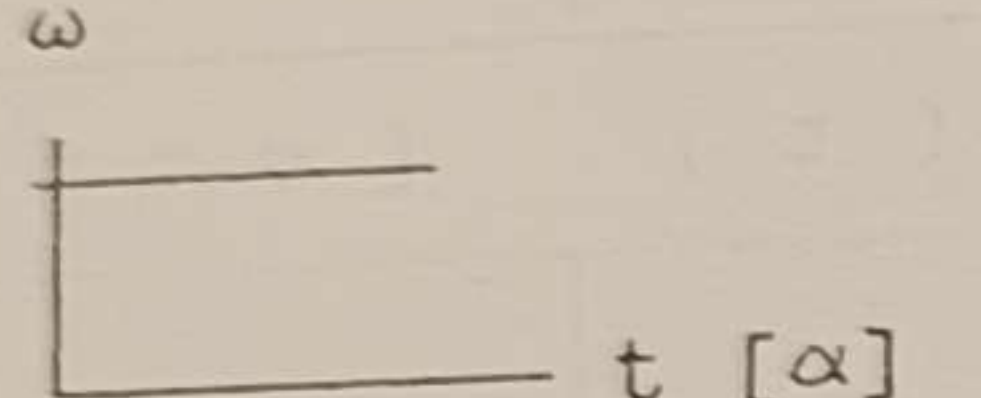
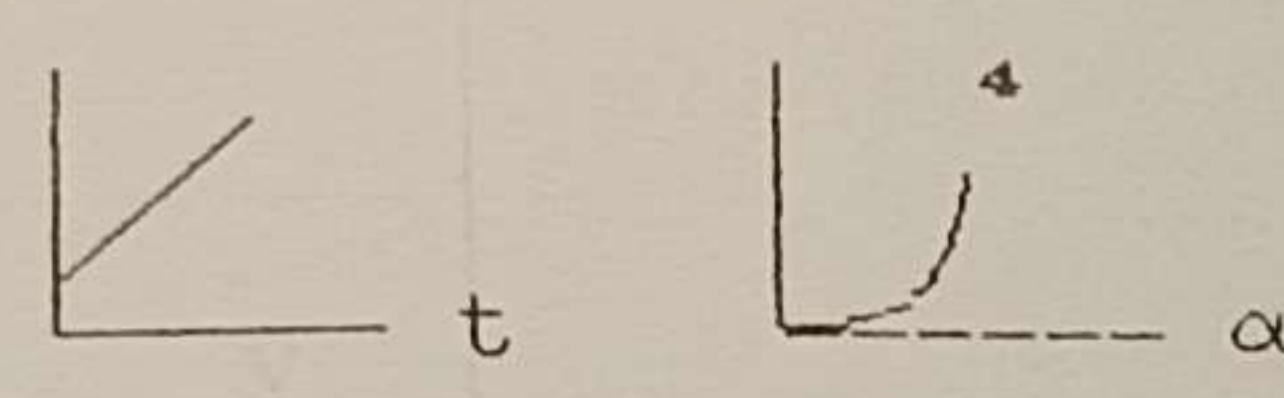
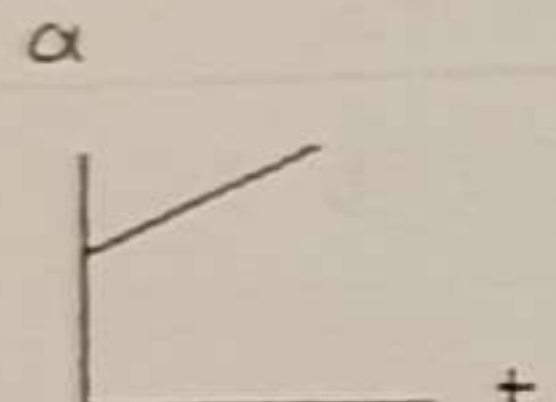
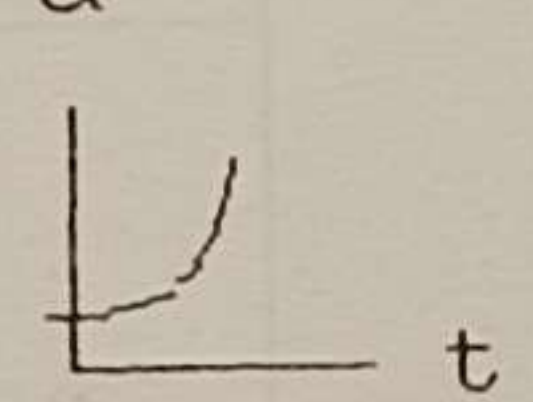
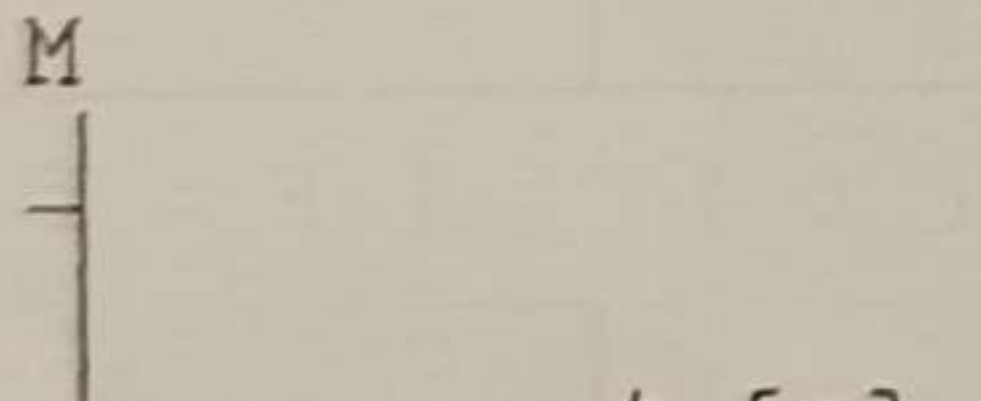
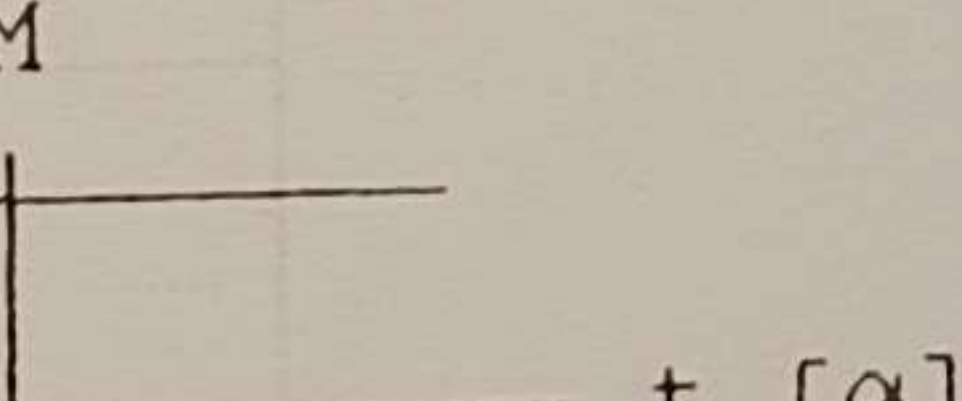
Forma tipo: $y = a \cdot x^{-1}$ ($a \neq 0$)

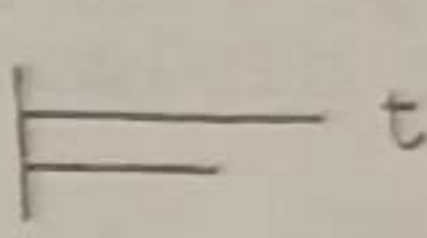
Gráficas:



20. Movimiento

MOVIMIENTO	M. R. U.	M. R. U. V.
Nombre	Movimiento Rectilíneo Uniforme	Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado
Características (1)	$\vec{a} = 0$ [$\vec{v} = K$]	$\vec{a} = K$
Gráficas (3)	$a = f(t)$ [$a = f(r)$]  	
	$v = f(t)$ [$v = f(r)$]  	
	$r = f(t)$  	
	$F = f(t)$ [$F = f(r)$]  	
Ecuaciones	$\Delta r = v \cdot \Delta t$	$v_f = v_i + a \cdot \Delta t$ $\Delta r = \frac{(v_f + v_i) \cdot \Delta t}{2}$ $\Delta r = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2 \cdot a}$ $\Delta r = v_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2$ $\Delta r = v_f \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2$

MOVIMIENTO	M. C. U.	M. C. U. V.
Nombre	Movimiento Circular Uniforme	Movimiento Circular Uniformemente Variado
Características (1)	$\vec{a}_c = 0$ [$\vec{\omega} = K$]	$\vec{a}_c = K$
Gráficas (3)	$a_c = f(t)$ [$a_c = f(\alpha)$]	
		
	$\omega = f(t)$ [$\omega = f(\alpha)$]	
		
	$\alpha = f(t)$	
		
Ecuaciones	$M = f(t)$ [$M = f(\alpha)$]	
		
	$\Delta\alpha = \omega \cdot \Delta t$	$\omega_f = \omega_i + a_c \cdot \Delta t$ $\Delta\alpha = \frac{(\omega_f + \omega_i) \cdot \Delta t}{2}$ $\Delta\alpha = \frac{\omega_f^2 - \omega_i^2}{2 \cdot a_c}$ $\Delta\alpha = \omega_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a_c \cdot \Delta t^2$ $\Delta\alpha = \omega_f \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot a_c \cdot \Delta t^2$

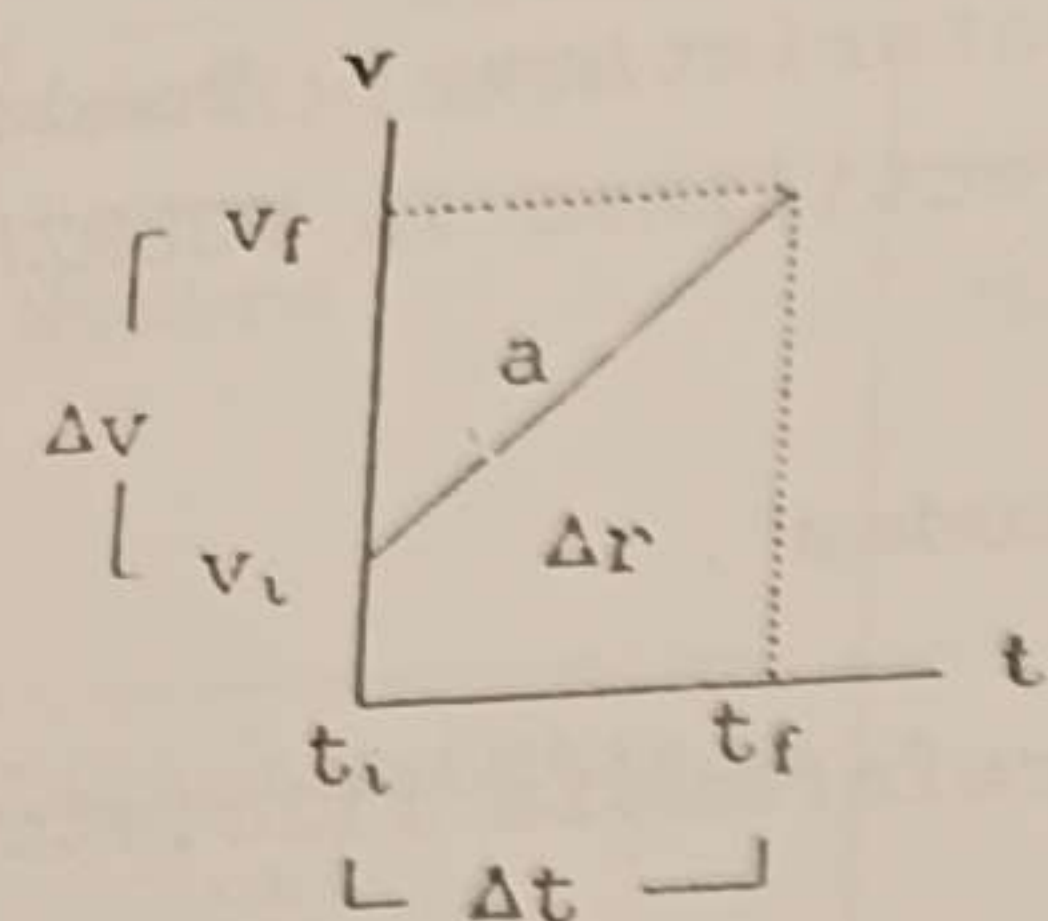
- Es la magnitud que se toma usualmente como característica. Puede tomarse otra mag., por ej. para el movimiento rectilíneo la FUERZA.
- Para las dif. mag. y sus unidades ver "Magnitudes".
 - Se considera la masa constante, sistema de referencia fijo, etc. (ver: "Ejercicios")
 - [r] significa que la gráfica de una magnitud en función del tiempo tiene igual pendiente, aunque el significado físico de la misma sea distinto (Idem para [α]).
 - Al lado de cada magnitud, entre paréntesis curvos, se debe escribir la unidad correspondiente.
- Existen otras gráficas que también pueden corresponder a ese movimiento.
Por ejemplo para el M.R.U. la $v=f(t)$ puede ser: 
- Representa una rama de parábola.

Deducción.

a. La deducción de una ecuación a partir de otras ecuaciones y/o una/s gráfica/s es un método "normal" dentro de la Física y otras ciencias.

b. Aunque no sea exigido en el curso, es conveniente saber de donde "salen" las ecuaciones que se están utilizando, evitando su "decreto" por parte del docente o el libro. Por otra parte el alumno se debe acostumbrar a comprender y a utilizar, dentro de cada nivel, la herramienta matemática, erradicando el carácter "mágico" que parecieran tener.

c. En este caso se hará la deducción de las ecuaciones del M.R.U.V. a partir de la gráfica $v=f(t)$. El M.C.U.V. es similar solo que se utilizaría la gráfica $\omega=f(t)$. El M.R.U. y el M.C.U. son casos particulares del M.R.U.V. y el M.C.U.V.



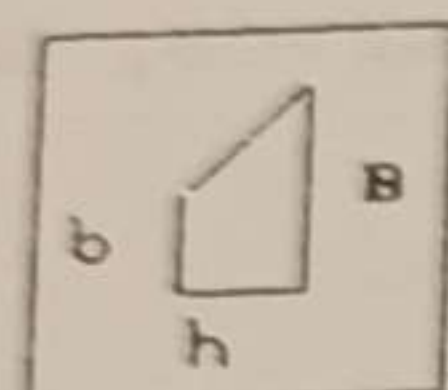
1. Si la aceleración es la pendiente de la gráfica $v=f(t)$:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta v = a \cdot \Delta t \Rightarrow v_f - v_i = a \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$v_f = v_i + a \cdot \Delta t \quad (A)$$

2. Si Δr es el área entonces se puede calcular de tres formas:

I. Por área del trapecio: $A_{\Delta} = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$; siendo $B \Rightarrow v_f$, $b \Rightarrow v_i$ y $h \Rightarrow \Delta t$.

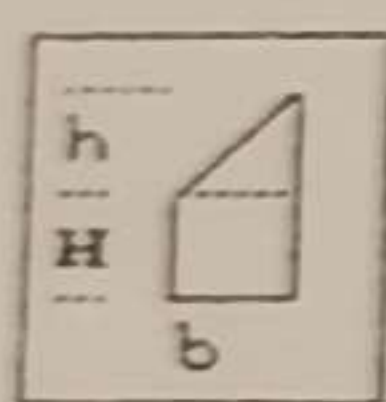


Si se sustituye:

$$\Delta r = \frac{(v_f + v_i) \cdot \Delta t}{2} \quad (B)$$

II. Si lo dividimos en un triángulo y un rectángulo tenemos dos posibilidades:

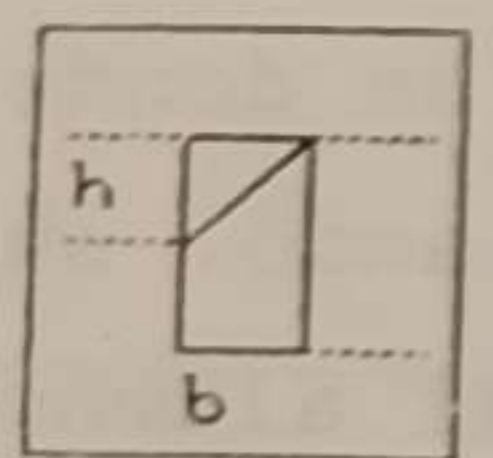
$$* A_{\Delta} = A_{\square} + A_{\triangle} = b \cdot h + \frac{1}{2} \cdot b \cdot h; \text{ siendo } b \Rightarrow \Delta t, h \Rightarrow \Delta v \text{ y } H \Rightarrow v_i.$$



Si se sustituye: $\Delta r = v_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot \Delta v \cdot \Delta t$ y $\Delta v = a \cdot \Delta t$ (ver A)

$$\Delta r = v_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta r = v_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 \quad (C)$$

$$** A_{\Delta} = A_{\square} + A_{\triangle} = b \cdot h - \frac{1}{2} \cdot b \cdot h; \text{ siendo } b \Rightarrow \Delta t, h \Rightarrow \Delta v \text{ y } H \Rightarrow v_f.$$



Si se sustituye: $\Delta r = v_f \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot \Delta v \cdot \Delta t$ y $\Delta v = a \cdot \Delta t$ (ver A)

$$\Delta r = v_f \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta r = v_f \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 \quad (D)$$

$$3. \Delta r = \frac{(v_f + v_i) \cdot \Delta t}{2} \text{ pero } \Delta t = \frac{\Delta v}{a} \Rightarrow \Delta r = \frac{(v_f + v_i)}{2} \cdot \frac{\Delta v}{a} = \frac{(v_f + v_i)}{2} \cdot \frac{(v_f - v_i)}{a}$$

Por lo tanto:

$$\Delta r = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2 \cdot a} \quad (E)$$

Problemas:

1) Despeje la magnitud indicada en la siguiente ecuación:

- I) En la ec. (A) $\Rightarrow v_i$, II) En (B) $\Rightarrow \Delta t$ y v_f ,
 III) En (C) $\Rightarrow a$ y Δt , IV) En (E) $\Rightarrow a$ y v_f .

2) Reescriba las ecuaciones si:

- I) $t_i = 0$; II) $r_i = 0$; III) $v_i = 0$; IV) $v_f = 0$;
 V) $v_i = v_f$; VI) la aceleración tiene sentido contrario a v_i .

3) Reescriba las ecuaciones en los siguientes casos particulares, si el cuerpo: I) Está en reposo.

II) Cae libremente con una ac. constante (g) y $v_i = 0$.

III) Ascende verticalmente con una ac. constante (g).

4) Un cuerpo de 4,0 Kg se mueve en un camino recto durante 10s.

El movimiento se describe con la siguiente ec.:

$$\Delta r = 2,0 \frac{m}{s} \cdot \Delta t - 5,0 \frac{m}{s^2} \cdot \Delta t^2$$

I) Obtenga las magnitudes deducibles a partir de la ec.

II) Deduzca nuevas magnitudes. (F , v_f , etc.)

III) Describa el movimiento utilizando las gráf. correspondientes.

5) ¿Cuándo se utiliza una u otra ecuación? Explique.